ELEMENTI GEOMETRICI PIANI, E SOLIDI DI EUCLIDE

POSTI BREVEMENTE IN VOLGARE

DAL REVERENDISS. PADRE ABATE

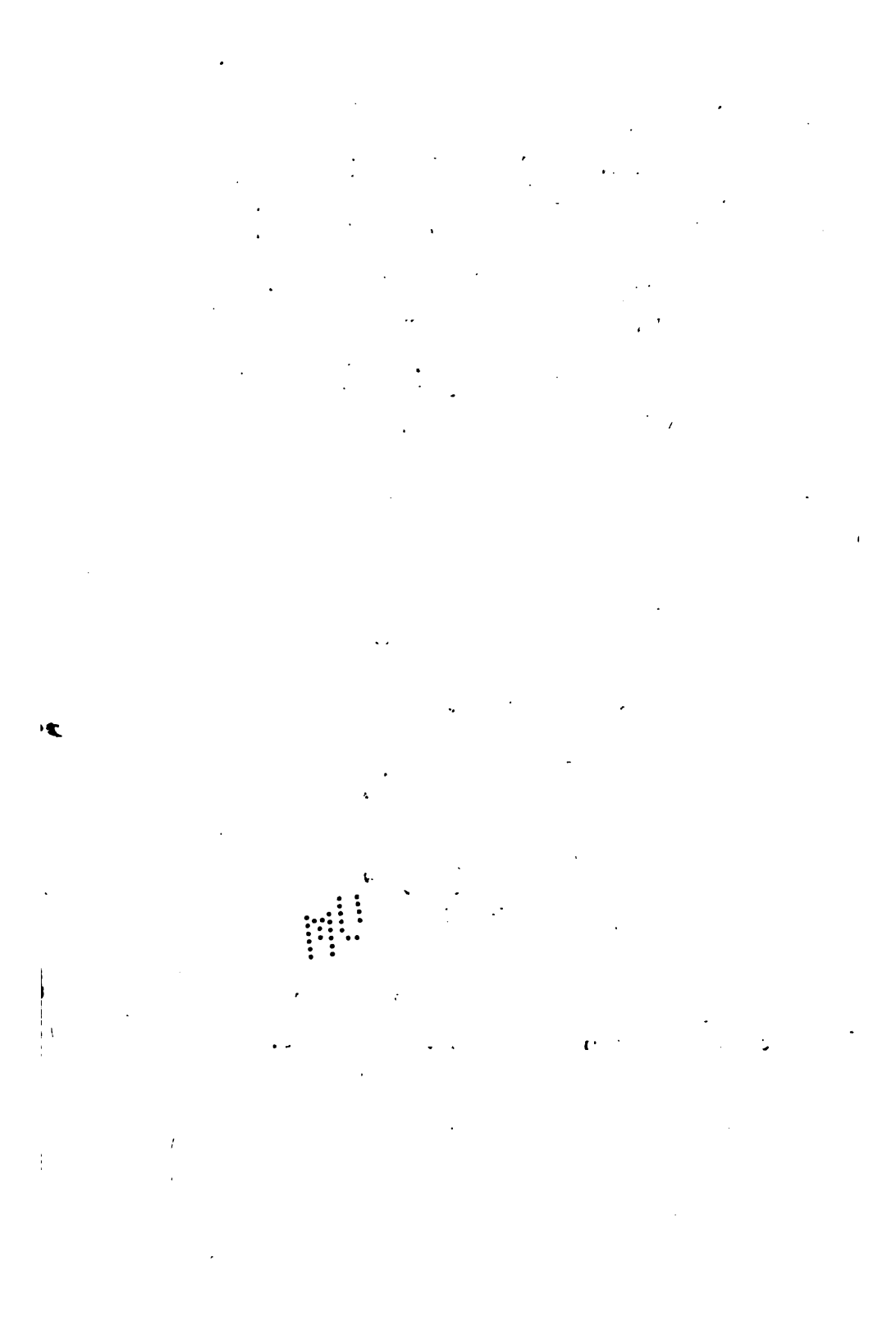
D. GUIDO GRANDI

CAMALDOLESE

PROFESSORE DI MATTEMATICA
NELL' UNIVERSITA DI PISA.

IN FIRENZE NELLA STAMPERIA DI S. A. R.

Per Gio: Gaetano Tartini, e Santi Franchi.

CON LIC. DE' SUP. MDCCXXXX.

PREFAZIONE

A' BENEVOLI LETTORI.

Uesti ELEMENTI GEOMETRICI, fatti da EUCLIDE, sono necessarj a chiunque brama erudirsi della Mattematica, la quale é necessaria non solo a' Filosofi, come ne discorrono molti, e nelle Opere Fisiche tante si trovano poste immagini Mattematiche; ma ancora a' Teologi, ed a' Legali, come di quelli ne discorre il P. Carlo Rabby nel suo Libro a me dedicato, il di cui titolo è: *De Mathematicarum disciplinarum ad Theologiam utilitate, ipsarumque in ea usu*; e di questi altri ne accenna il Delfinate Giovanni Butteoni nelle sue Opere Geometriche *pag.* 135. col titolo ivi posto:

Geo-

Geometriæ cognitionem Jurisconsulto necessariam. E che a tutti i Letterati appartenga la Geometria, dice l' Imperatore Diocleziano, con l'altro Massimiano, nel Codice *lib.* 9. *tit.* 18. *l.* 2. *Artem Geometriæ discere, atque exercere publicè interest*; ove, benchè vi si aggiunga: *Ars autem Mathematica damnabilis est*, si parla de' Malefici, di cui dicesi nel Lessico Giuridico *pag.* 567. *Mathematici dicuntur, non qui honestissima Mathematum studia docent, sed qui divinationibus, & aruspicinis homines ludificantur, ut Genethliaci, Astrologi, Chaldei, quorum ars jure nostro improbata &c.*

Però chi non averà imparati questi Geometrici Elementi, non potrà in altre Dottrine riuscir bene informato, a proposito di tutte le Scienze, in cui si trovano alcune proposizioni, appartenenti ad essi Teoremi, o Problemi Geometrici di qualche pratica proposta da' Mattematici; onde la regola di qualsivoglia difesa non manca de' Geometri, come dicesi nella *legge* 22. *del tit.* 1. *lib.* 27. *digestorum*, cioè: *Geometræ a tutelis non vacant*; ed il Proclo Diadoco *lib.* 2. *cap.* 5. ne accenna: *Geometricarum re-*

rum

rum contemplationis institutio, invincibilem, perfectamque habet enarrationem; e molto più altrove ne parla in quell' Opera, dove comenta questi Elementi d' Euclide.

Non fu però Euclide il primo, che parlasse di tali principj Mattematici, avendone prima parlato Talete, Milesio, Pittagora, Anaxagora, Clazomenio, Ippocrate Chio, Leonzio, Eudosso Gnidio, Theudio Magnete, Ermotimo Colofonio ec. Ma più prestantemente furono raccolti da Euclide, e rimessi gli anteriori, che non più si ritrovano; però solamente questi Elementi di Euclide, per venti secoli unicamente sono stati abbracciati da chiunque si volle informare delle Instituzioni Mattematiche; e solamente in quest' ultimo secolo, cioè dal 1650. in quà ne sono stati fatti altri Elementi di Geometria da varj Autori, dal Borelli, dal Lami, dal Pardies, dallo Sturmio, dal Rossetti, dal Sig. Angelo Marchetti ec. e da me ancora, come potrà vedersi nelle mie Instituzioni Geometriche.

Questo dottissimo Geometra Euclide fu da molti chiamato *Megarense*, cioè da Bartolommeo Zamberto, negli Elementi da esso

stam-

ſtampati di Campano, e di Teone Greco; ed ancora da Giovanni Scheubeglio, da Oronzio Fineo, da Niccolò Tartalea, e da alcuni altri; il che però è falſiſſimo, benchè ſia ſtato Euclide Megarenſe un Filoſofo diſcepolo di Socrate, creduto da quelli Autori, eſsere l' iſteſso Mattematico, che fece queſti Elementi; il che non è vero. Imperocchè Proclo Diadoco dice di queſto Euclide Mattematico, che fioriſse al tempo di Tolomeo Lago Re di Egitto, di cui godeva la familiarità, e la grazia; ma dalla morte di Socrate, Maeſtro di quell' altro Euclide Megarenſe, ne corſero 95. anni al Regno del ſuddetto Tolomeo, come dice Stanleio; o almeno anni 80. come accenna il Petavio; dunque non potea queſto Euclide Mattematico eſsere lo ſteſso con quell' altro Euclide Megarenſe diſcepolo di Socrate, e però viſſuto più avanti del Mattematico.

Di più lo ſteſso Proclo afferma, che queſto Euclide Geometrico foſse più giovane di Menechemo, diſcepolo di Eudoſso Gnidio, il quale pure era ſtato diſcepolo di Platone; ma fu ancora di Platone Maeſtro il detto Socrate, dunque eſso Mattematico Euclide

non

non può avere conoſciuto Platone, ſe non molto vecchio, e molto meno potè eſsere egli diſcepolo di Socrate, come era quell' altro Euclide di Megara; ed ancora può oſservarſi, che tra gli ſcritti d'Euclide Megarenſe, regiſtrati da Diogene Laerzio, non vi è coſa alcuna mattematica, e però non può crederſi, eſsere il medeſimo coll' Autore di queſti Geometrici Elementi. Anzi l' iſteſso Diogene Laerzio rapporta, che quell' Euclide Megarenſe ſi era dato a conteſe litigioſe, e dal Maeſtro Socrate fu biaſimato, che gli diſse, non poter eſso abitare con uomini ragionevoli, ma con cavilloſi ſofiſti. Il che non può attribuirſi ad Euclide Geometra, che fu manſuetiſſimo, e dottiſſimo, come ce lo deſcrive Pappo Aleſsandrino: *ſuaviſſimi Vir ingenii*. Che però non era di Megara, ma della Regia Aleſſandria, dove egli aprì la prima ſcuola di Mattematica, e ne fece molti buoni diſcepoli, da cui ſuccedettero Eratoſtene, ed Archimede.

Queſto è quanto può dirſi, intorno alla Patria di Euclide, Autore di queſti Elementi Geometrici, de' quali però ſolamente i primi

ſei libri de' Piani, e poſcia l'undecimo, il duodecimo, e il terzodecimo de' Solidi ho quì addotti; avendo laſciati il ſettimo, l'ottavo, ed il nono, ove ſi parla della proporzione de' numeri, ed ancora il decimo, ove tratta delle grandezze commenſurabili, ed incommenſurabili; ſiccome pure queſti libri furono omeſſi negli Elementi fatti ſtampare dal Sig. Viviani, e da altri Autori, ne' libri Geometrici da loro dati alle ſtampe. Voi però, Benevoli Lettori, leggendo queſte Propoſizioni, da me alquanto più brevemente raccolte, facilmente ne imparerete il maggior corſo della Mattematica. E nel riverirvi divotamente, vi prego vivere felici.

ELEMENTI DELLA GEOMETRIA DI EUCLIDE.

LIBRO I.

DEFINIZIONI.

I. IL PUNTO è un ſegno nella quantità, ſenza veruna parte.

II. La LINEA è una eſtenſione in lungo, ſenza veruna larghezza.

III. E ſe la linea è terminata, i ſuoi TERMINI ſaranno i due punti, in cui finiſce.

IV. Diceſi RETTA quella linea, che tra i ſuoi punti ſi diſtende egualmente.

Tav. I. FIG. 1.

Così facendo colla penna un tratto AB, *ovvero* DE, *il ſegno* A, *da cui principia, e l' altro* B, *in cui termina, è un* PUNTO, *di cui non può determinarſi parte veruna, perchè ſe foſſe diviſibile, non ſarebbe tutto il principio, nè tutto il fine di queſto ſemplice tratto, il quale è una* LINEA AB *diſteſa in lungo da un termine all' altro, ma ſenza larghezza, perchè quantunque la groſſezza della punta della penna, da cui fu ſegnata, gli abbia data qualche piccola eſtenſione in largo, queſta non deve attenderſi, ma ſolamente l' eſtenſione in lungo da un termine all' altro: in quella maniera, che miſurandoſi l' altezza di varie torri, non ſi fa conto del-*

la loro larghezza, ma solamente si considera l' estensione in lungo, dal piano sopra cui posano, alle loro sublimi punte. Dicesi poi AB LINEA RETTA, *perchè ancora qualunque punto* C, *in cui può dividersi, è interposto direttamente fra i termini* A, B, *nè veruno di quei punti intermedj si diverte a destra, o a sinistra, e però si distende egualmente essa linea fra i punti estremi; a differenza dell' altra linea* DE (*che chiamerebbesi* LINEA CURVA) *la quale non è ben tesa al pari fra l' uno, e l' altro de i suoi termini* D, E, *ma dividendosi in qualunque punto* F, *si vede questo distratto a destra, o a sinistra, più di un altro punto* G, *in cui può altrove dividersi, e però si vede piegata questa linea in un seno, e non distesa direttamente, come l' altra* AB, *che è la minima si possa descrivere fra i medesimi termini* A, B.

V. SUPERFICIE dicesi l' estensione in lunghezza, e in larghezza, senza veruna profondità.

VI. E se la superficie è terminata, gli suoi ESTREMI sono le linee, in cui finisce.

VII. Dicesi PIANA quella superficie, che giace distesa egualmente tra le sue linee.

FIG. 2. *Così l' estensione* ABCD, *la cui lunghezza è* AB, *e la sua larghezza* BC, *è una* SUPERFICIE, *la quale, se non ritorna in se stessa, come è quella di una palla rotonda, ma è terminata, ha per suoi* TERMINI, *o* ESTREMI *quelle linee, da cui è circondata, o siano rette, come* AB, BC, CD, AD, *da cui è confinata la superficie* ABCD, *o siano parte rette, e parte curve, come la superficie* ADEF, *o vero l' altra* FBCE, *di cui la curva* FE *è uno degli estremi, o da più curve, o da una curva sola,*

la, da cui fosse circoscritta. E se detta superficie ABCD, *tra le sue linee estreme è così egualmente distesa, come un velo per ogni verso ben tirato, che in veruna parte non si avvalli, dicesi* PIANA: *a differenza d'un altra superficie* GNLH, *che è* FIG. 3. *come una vela gonfia dal vento, e da varie linee* HI, HM, HK *divisa, non si trovano queste egualmente giacenti, ma alcune più alte, ed altre più basse.*

VIII. L'ANGOLO PIANO è ciò, che risulta dall'inclinazione di due linee, le quali nella superficie piana s' incontrino in un punto, e non siano poste per diritto fra loro.

IX. Se le linee contenenti l'angolo saranno amendue rette, dirassi tale angolo RETTILINEO.

X. Stando una linea retta sopra di un altra, in maniera, che non penda più da questa, che da quella parte, dirassi PERPENDICOLARE alla linea soggetta.

XI. E ciascheduno degli angoli uguali, che di quà, e di là ne risultano, chiamerassi ANGOLO RETTO.

XII. L'angolo poi maggiore del retto dirassi ANGOLO OTTUSO, ed il minore del retto, ANGOLO ACUTO.

Le rette AC, BC, *che s' incontrano per diritto nel punto* C, *non fanno un angolo, ma una medesima linea retta; le linee poi* EC, BC, *di cui l' una* FIG. 4. *è inclinata all' altra, costituiscono l'* ANGOLO PIANO ECB (*nominando qualunque angolo, si porrà sempre nel mezzo il punto, in cui le linee s' incontrano, e negli estremi l' uno, e l' altro termine di esse linee, come quì si è detto* ECB, *di cui la let-*

tera di mezzo C *indica il punto, in cui si fa l' angolo, e le altre due* E, B *indicano gli estremi delle linee, che lo comprendono*) *ed è* ANGOLO RETTILINEO, *essendo ambe le linee* CE, CB *rette*; *che se fossero curve, si direbbe* CURVILINEO, *se una retta, l' altra curva*, MISTILINEO. *In quanto poi alla linea* DC, *che insiste nel punto* C *sopra la retta* AB, *non essendo più inclinata da una parte, che dall' altra, si chiama* PERPENDICOLARE *essa* DC *alla soggetta* AB; *e ciascuno degli angoli, che risultano eguali dall' una, e dall' altra parte*, DCA, DCB, *dicesi* ANGOLO RETTO; *ma l' angolo* ECA, *che comprende il retto* DCA, *e però è maggiore di esso, si dirà* ANGOLO OTTUSO, *e l' angolo* ECB, *che è una parte dell' angolo* DCB, *e però è minore del retto, si chiamerà* ANGOLO ACUTO.

XIII. FIGURA dicesi quell' estensione, che da uno, o più termini è circoscritta, li quali TERMINI sono gli estremi, da cui è confinata.

XIV. Delle figure comprese da linee curve, che CURVILINEE si nominano, la più semplice è il CERCHIO, o CIRCOLO, che è una figura piana compresa da una sola linea curva, che ritorna in se stessa (e chiamasi CIRCONFERENZA, o PERIFERIA) a cui tirate quante si vogliano linee rette da un punto dentro il piano di essa figura, tutte fra di loro riescono uguali.

XV. Quel punto, da cui si spiccano le linee tutte uguali, dicesi CENTRO.

XVI. E qualunque retta linea, che passi per esso centro, e termini alla circonferenza da ambe le parti opposte, dicesi DIAMETRO.

XVII. La Figura compresa da esso diametro, e dal-

dalla parte di circonferenza segata da esso, chiamasi SEMICIRCOLO, o MEZZO CERCHIO.

Si descrive questa figura con un compasso di due gambe aperte a qualche intervallo, tenendo fissa nel punto C *la punta di una gamba, e facendo girare l' altra nel piano, in cui si disegnerà la curva* ADBF, *che ritorna in se stessa; così questa figura sarà un* CIRCOLO, *o* CERCHIO, *la curva, da cui è terminata, dirassi* CIRCONFERENZA, *o* PERIFERIA; *il punto* C *sarà il* CENTRO, *e tutte le rette* CE, CD, CF, *&c. saranno eguali, e si diranno* RAGGI, *ò* SEMIDIAMETRI, *e tutta l' intera retta* AB *tradotta pel centro, si dirà* DIAMETRO, *e la figura* ADB SEMICIRCOLO, *o* MEZZO CERCHIO. FIG. 5.

XVIII. Le figure poi contenute da linee rette chiamansi RETTILINEE, delle quali la più semplice è quella, che da tre linee rette comprendesi, e si chiama TRILATERA FIGURA, ovvero TRIANGOLO; se poi si racchiude da quattro rette linee, si dirà FIGURA QUADRILATERA, e se da più di quattro, MOLTILATERA.

XIX. Di esse figure Trilatere quella, che ha tre lati uguali, chiamasi TRIANGOLO EQUILATERO.

XX. Quella poi, che ha due soli lati uguali, dicesi TRIANGOLO ISOSCELE, o EQUICRURE.

XXI. E quella, che sarà compresa da tre lati disuguali, si dirà TRIANGOLO SCALENO.

XXII. Si possono ancora denominare dagli angoli, de' quali se uno in essa figura Trilatera è retto, si dirà TRIANGOLO RETTANGOLO; se uno è ottuso, chiamerassi OTTUSIANGOLO; se tutti acuti, dirassi ACUZIANGOLO.

FIG. 6. *Essendo le rette linee* AB, BC, AC *eguali, il triangolo* ABC *dicesi* EQUILATERO; *e se i lati* DE, DF *solamente siano uguali, dicesi il triangolo* DEF ISOSCELE, o EQUICRURE; *ed essendo tutti i lati* GH, HI, IG *disuguali sarà il triangolo* HGI SCALENO. *Se poi l'angolo* KLM *fosse retto, sarebbe* KLM *un triangolo* RETTANGOLO; *ed essendo l'angolo* GHI, *ottuso, il triangolo* GHI *si dirà* OTTUSIANGOLO; *ma essendo tutti gli angoli acuti, come in* ABC, *e in* EDF, *si dirà ciascuno di essi triangolo* ACUZIANGOLO.

XXIII. Delle Figure poi Quadrilatere, quella', che ha tutti i lati uguali, e ciaschedun angolo retto, si chiama QUADRATO.

XXIV. Quella poi, che non ha ciascun lato eguale, e però è bislunga, ma ha tutti gli angoli retti, dicesi RETTANGOLO.

XXV. Quella che ha tutti i lati eguali, ma gli angoli non retti, chiamasi ROMBO..

XXVI. Quella poi che ha solamente i lati opposti, e gli angoli opposti eguali, ma non è equilatera, ne rettangola, si nomina ROMBOIDE.

XXVII. L'altre figure poi quadrilatere, che non hanno tali condizioni, si dicono TRAPEZII.

Si vede l'esempio del QUADRATO *nella figura* FIG. 7. ABCD, *e del* RETTANGOLO *nell'altra* FGHE, FIG. 8. *siccome dal* ROMBO *nella* IKLM, *e della* ROMBOIDE *nella seguente* NOPQ, *siccome del* TRAPEZIO *nel* FIG. 9. *quadrilatero* RSTV.

XXVIII. Si dicono tra di loro PARALLELE quelle linee rette, che giacendo nella stessa superficie piana, ancora che si prolungassero in infinito verso qualunque parte, mai converrebbero insieme.

Ta-

Tali sono le rette AB, CD, *che tanto a destra, quanto a sinistra prolungate non concorrono in verun punto, anzi mantengono sempre la stessa distanza tra loro, e però diconsi* PARALLELE: *e così sono i lati opposti delle prime quattro specie di Quadrilateri, cioè del Quadrato, del Rettangolo, del Rombo, e della Romboide, li quali ancora generalmente diconsi* PARALLELOGRAMMI, *per avere qualunque paio di lati opposti, tra di loro paralleli.* FIG. 10.

DIMANDE.

I. Si ammetta, che da qualunque punto a qualsivoglia altro punto possa tirarsi una linea retta.

II. E qualsivoglia data linea possa prolungarsi in infinito, quanto sarà di bisogno.

III. E da qualunque punto, come centro, con qualsivoglia intervallo, che determini il raggio, cioè la distanza della circonferenza dal centro, si possa descrivere un cerchio.

ASSIOMI.

I. Quelle cose, che sono uguali ad una terza, sono ancora eguali fra loro.

II Se alle cose uguali si aggiungono, o si levano altre uguali, o una medesima ad ambidue commune, ne risultano complessi, o residui uguali.

III. Se alle cose disuguali si aggiungono, o si detraggono cose uguali, o una stessa ad entrambi commune, rimangono gli aggregati, o i residui disuguali come prima.

IV. Le cose, che sono il duplo, o la metà di una medesima, o di eguali cose, sono pure tra di loro uguali,

V. Le cose, che sovrapposte si combaciano esattamente, sono altresì uguali.

VI. Il tutto è maggiore di qualunque sua parte, ed è uguale alla somma di esse.

VII. Tutti gli angoli retti sono tra di loro uguali.

VIII. Se due linee rette siano segate da una terza, in maniera, che da una parte ne risultino due angoli interni minori di due retti, e dall' altra banda maggiori, prolungate in infinito quelle due rette dalla banda, ove sono gli angoli minori, dovranno insieme concorrere.

La verità, ed evidenza di questo Assioma si mostrerà dopo la Proposizione 28. *del lib.* 1. *e sarà allora più agevolmente intesa.*

IX. Due linee rette non comprendono interamente spazio veruno.

X. Incontrandosi due linee rette in un punto, si segano, e non vanno insieme per verun tratto di lunghezza, che possa essere un segmento commune ad ambidue, ma subito si separano l' una dall' altra.

AVVERTIMENTO.

Alcune proposizioni della Geometria si chiamano PROBLEMI, *quando in esse si propone qualche cosa prattica da farsi. Altre si dicono* TEOREMI, *ne' quali solamente si espone qualche verità speculativa da dimostrarsi. In ciascuna di tali proposizioni conviene distinguere il* DATO, *e il* QUESITO, *perchè sempre, date alcune cose, si cerca, o di farne alcune altre ne' Problemi, o di mostrarne altre ne' Teoremi. In oltre occorre per lo più di fare qualche* ope-

operazione sopra il Dato, per eseguire il proposto ne i Problemi, o per fare strada alla dimostrazione de i Teoremi; e questa dicesi COSTRUZIONE, *a cui poscia segue la* DETERMINAZIONE *del quesito, e indi la* DIMOSTRAZIONE, *che è la parte principale di tutte le proposizioni; e finalmente la* CONCLUSIONE *di ciò, che si dovea fare, o dimostrare. Noi distingueremo ciascuna di queste parti nella Proposizione prima, che è il primo Problema, e nella quarta, che sarà il primo Teorema, per poterle distinguere, come potrà fare qualunque discreto, ed attento Lettore nell' altre proposizioni, in cui non accaderà darne veruno indizio, per essere più succinti.*

Ne' titoli delle proposizioni problematiche si aggiungerà il vocabolo di PROBLEMA, *e quello di* TEOREMA *si metterà solamente nel primo, e non nell' altre Proposizioni, che si supporranno tutte Teorematiche, quando non vi è apposta la parola di* PROBLEMA.

COROLLARIO *poi dicesi ciò, che si deduce dal già dimostrato nella precedente proposizione.*

PROPOSIZIONE I. PROBLEMA.

FIG. 11.

Sopra una data retta linea terminata AB *constituire un Triangolo equilatero.*

Dato: Quesito:

DAl centro *A*, coll' intervallo *AB*, descrivasi il cerchio *BCD* [a], e similmente dal centro *B*, coll' intervallo *BA*, descrivasi un altro cerchio *ACE* [a]. E dal punto *C*, in cui s' incontreranno le loro circonferenze, a gli estremi punti *A*, *B* della data linea *AB*, si conducano le rette linee *CA*, *CB* [b]. Dico, che il triangolo *ABC* quindi re-

Costruzione:

[a] Dimanda 3.

[b] Dimanda 1.

Determinazione. resultante, sarà Equilatero. Essendo *A* il centro del cerchio *BCD*, sarà *AC* uguale ad *AB* [a]; ed essendo ancora *B* centro del cerchio *ACE*, sarà pure *CB* uguale ad *AB* [a] Dunque le due AC, *CB* sono altresì uguali tra di loro [b]; e però tutti tre i lati del triangolo *ABC* essendo uguali, sarà esso triangolo Equilatero [c]. Adunque sopra la data retta linea *AB* si è formato il triangolo equilatero; il che si era proposto di fare.

Dimostrazione. — Costruzione.

a *Definizione* 14. b *Assiom.* 1. c *Defin.* 19.

PROPOSIZIONE II. PROBL.

FIG. 12. *Dal dato punto* A *tirare una linea retta* AL *uguale ad un altra data* BC.

Tirisi la retta *AB* [d], e sopra di essa formisi il triangolo equilatero *ABD* [e], i di cui lati *DB*, *DA* si prolunghino indefinitamente [f], e col centro *B* all' intervallo *BC* descrivasi il cerchio *CH* [g], segante il lato prolungato *DB* in *G*. Poscia col centro *D* all' intervallo *DG* si descriva l'altro cerchio *GK* [g], segante il lato prolungato *DA* in *L*. Perchè dunque sono eguali le rette *DG*, *DL* [h], come ancora le rette *DB*, *DA* [i] levando queste da quelle, rimarranno eguali le residue *BG*, *AL* [k]; ma ancora *BC* è uguale a *BG* [l]; dunque le rette *AL*, *BC* sono eguali, [m] e però dal dato punto *A* si è condotta *AL* uguale alla data retta linea *BC*. Il che erasi proposto di fare.

d *Dimanda* 1. e *Proposiz. preced.* f *Dimanda* 2. g *Dimanda* 3. h *Defin* 14. i *Defin.* 19. k *Assiom.* 2. l *Defin.* 14. m *Assiom.* 1.

PROPOSIZIONE III. PROBL.

FIG. 13. *Date due linee rette disuguali, dalla maggiore* AB *tagliarne una parte* AE, *uguale alla* C *minore delle date.*

Ti-

Tirisi dal punto *A* la retta *AD* uguale alla C [a], e col centro *A* descrivasi per il punto *D* il cerchio *DF* [b], che segherà la *AB* in *E*. Sarà dunque *AE* uguale ad *AD* [c], e però ancora alla data *C* [d]. Il che si doveva fare.

a *Proposiz. preced.*
b *Dimanda* 3.
c *Defin.* 14.
d *Assiom.* 1.

PROPOSIZIONE IV. TEOREMA.

FIG. 14.

Dato.

Se due triangoli ABC, DEF *averanno un angolo* A *eguale ad un angolo* D, *ed intorno ad essi siano i lati dell'uno uguali a i lati dell'altro, cioè* AB *uguale a* DE, *ed* AC *uguale a* DF, *sarà ancora la base* BC *dell'uno, uguale alla base* EF *dell'altro, e ciascuno degli altri angoli eguale al suo corrispondente, cioè l'angolo* B *all'angolo* E, *e l'angolo* C *all'angolo* F; *e tutto il triangolo* ABC *sarà uguale a tutto il triangolo* DEF.

Quesito.

Costruzione.

S'Intenda applicarsi un triangolo sopra l'altro, di maniera che l'angolo *A* si soprapponga all'angolo *D*, e il lato *AB* si adatti sopra il lato *DE*. Quindi si vedrà essere le basi, e tutti gli altri angoli eguali, e ciascheduno de' triangoli uguagliare l'altro suo compagno. Imperocchè l'altro lato *AC* caderà sopra il lato *DF*, altrimenti gli angoli *A*, e *D* non sarebbero uguali, contro l'ipotesi; e il punto *B* caderà in *E*, e il *C* in *F*, essendosi supposti quei lati uguali; sicchè la base *BC* dovrà adattarsi sopra la base *EF*, ed esattamente coprirla, altrimenti le due linee rette comprenderebbero spazio, il che è assurdo [e]; che però combaciandosi amendue le basi, e ciaschedun' angolo al suo corrispondente, e tutto il triangolo a tutto il triangolo, saranno eguali le basi, ed egua-

Determinazione.
Dimostrazione.

e *Assiom.* 9.

eguali gli angoli opposti a i lati eguali, ed ambidue gli spazi de' triangoli parimente saranno eguali [a]. Se dunque due triangoli averanno le condizioni dette nella proposta, cioè un angolo eguale ad un angolo, ed i lati dell'uno eguali a quelli dell'altro intorno al medesimo angolo, saranno pure le loro basi uguali, e gli altri angoli eguali, e le superficie dell'uno, e dell'altro triangolo saranno eguali. Il che dovea dimostrarsi.

a Assiom. 5.

Conclusione.

PROPOSIZIONE V.

In ogni Triangolo equicrure ABC, *gli angoli interni sopra la base sono tra di loro uguali; e prolungando sotto essa base ambi i lati, gli angoli, che ne risultano esteriormente, saranno pure tra di loro uguali.*

FIG. 15.

Piglisi qualunque punto *F* nel lato *AB* prolungato, e alla *AF*, si ponga nell'altro lato *AC* eguale la *AG* [b], indi si tirino le rette *CF*, *BG* [c]. Essendo che il triangolo *AFC* ha lo stesso angolo *A*, che l'altro triangolo *AGB*, e sono i lati *AF*, *AG* eguali, come ancora i lati *AC*, *AB*, saranno pure tra loro eguali le basi *FC*, *GB*, e altresì l'angolo *F* uguaglierà l'angolo *G*, e l'altro *ACF* sarà uguale all'altro *ABG* [d], e perchè dalle linee uguali *AF*, *AG* detratte le uguali *AB*, *AC*, rimane *FB* uguale a *GC* [e], e si è provata ancora *FC* uguale a *GB*, e gli angoli *F*, *G* pure uguali, dunque ne i triangoli *FBC*, *GCB* l'angolo *FCB* uguaglierà l'angolo *GBC*, e l'angolo *CBF* sarà uguale all'angolo *BCG* [f] onde dall'angolo *ACF*, e dall'angolo *ABG*, che si so-

b Propos. 3.

c Dimanda 1.

d Propos. 4.

e Assiom. 2.

f Propos. 4.

ſono provati uguali, ſottraendo gli angoli eguali *FCB*, *GBC*, rimarranno eguali gli angoli reſidui *ACB*, *ABC* [a]; dunque nel triangolo equicrure ſono eguali gli angoli interni ſopra la baſe, e ancora prolungati i lati al di ſotto di eſſa, gli angoli eſteriori *CBF*, *BCG* pure ſono uguali, come ſi è provato. Il che è quanto doveva dimoſtrarſi.

a *Aſſiom.* 2.

PROPOSIZIONE VI.

Viceverſa, ſe in un triangolo ABC *ſono eguali due angoli* B, *e* C, *ancora i lati oppoſti ad eſſi*, AC, AB *ſaranno uguali*.

FIG. 16.

Altrimenti, ſe uno de i lati *AB* foſſe maggiore dell' altro *AC*, tagliata *BD* eguale ad *AC* [b], indi congiunta *CD* [c] averanno li triangoli *ACB*, *DBC*, intorno gli angoli *C*, *B* eguali, ancora i lati eguali *AC*; *BD*, e il lato *BC* comune, e però eguale in entrambi; dunque ſarebbero eſſi triangoli tra di loro uguali [d]; il che è aſſurdo, perchè ſarebbe il tutto eguale ad una ſua parte [e]. Non è dunque poſſibile, che detti lati *AB*, *AC* foſſero diſuguali, ma erano ambidue uguali; il che, ec.

b *Propoſ.* 3.
c *Dimanda* 1.
d *Propoſ.* 4.
e *Aſſiom.* 6.

PROPOSIZIONE VII.

Da i termini della medeſima retta linea AB *tirate due rette* AD, BD *concorrenti nel punto* D, *non ſi potrà da i medeſimi termini* A, *e* B *condurre altre linee* AC, BC *eguali alle prime, come* AC *alla* AD, *e* BC *a* BD, *le quali dalla medeſima banda concorrano in un punto* C *diverſo dall' altro* D.

FIG. 17. e 18.

Se

SE ciò si supponesse possibile, o sarebbe il loro concorso *C* fuori del triangolo *ADB*, e il punto *D* fuori dell' altro *ACB*, o pure uno di detti concorsi *C* sarebbe dentro l' altro triangolo *ADB*. Nel primo caso, congiunta la *CD*, sarebbe ciascuno de i triangoli *ACD*, *BCD* equicrure, supponendosi *AC* eguale alla *AD*, e la *BC* eguale a *BD*; dunque l' angolo *ACD* sarà eguale all' angolo *ADC*.[a] ma questo essendo parte dell' angolo *BDC*, sarà di esso minore [b], dunque ancora *ACD* sarà minore di *BDC*, e l' altro *BCD* molto minore del medesimo *BDC*, a cui dovrebbe essere uguale [a]. Dunque non possono le rette uguali alle prime convenire in *C* fuori del triangolo *ADB*. Ne meno concorreranno nel secondo caso, dentro di esso, perchè prolungate le linee *BD*, *BC* in *F*, *E* saranno eguali[a] gli angoli esterni *ECD*, *CDF*, per l' egualità de i lati *BC*, *BD*, e nel triangolo *ACD*, per essere *AC* eguale ad *AD*, saranno pure eguali gli angoli interni *ACD*, *ADC* [a]; dunque essendo *ACD* maggiore di *ECD*, sarebbe ancora *ADC* maggiore di *CDF*, cioè la parte maggiore del tutto, il che è assurdo [c]. Dunque non possono le rette *AC*, *BC* eguali alle due *AD*, *BD* condotte dagli stessi termini, concorrere dalla medesima banda in un punto diverso dal medesimo *D*. Il che dovea dimostrarsi.

a *Propos. 5.*
b *Assiom. 6.*
c *Assiom. 6.*

PROPOSIZIONE VIII.

Se due triangoli ABC, EDF *averanno i lati* AB, ED *tra di loro uguali, ed ancora i lati* AC, DF *uguali, ed in oltre le basi uguali* BC, EF, *sa-*

FIG. 19.

ſaranno altresì eguali tutti gli angoli corriſpondenti a i lati oppoſti uguali nell' uno, e nell' altro triangolo.

SI ſopprapponga il triangolo *ABC* all' altro *EDF*; adattate inſieme le baſi eguali *BC*, *EF*, gli altri lati uguali ſi adatteranno parimente inſieme, concorrendo colla cima *A* nel punto *D*; altrimenti due linee uguali alle prime, concorrerebbero in un punto diverſo da quello, in cui concorrono le altre, condotte da i medeſimi termini, il che è impoſſibile [a]. Dunque ſi adatteranno tutti gli angoli corriſpondenti, combaciandoſi inſieme *A* con *D*, *B* con *E*, *C* con *F*, eſſendo ſopprappoſti i lati, che gli comprendono; e però ſaranno i detti angoli uguali [b]. Il che doveaſi dimoſtrare.

a *Propoſ.* 7.

b *Aſſiom.* 5.

PROPOSIZIONE IX. PROBL.

Dato l' angolo rettilineo BAC, *dividerlo in due parti uguali.*

PReſo nel lato *AB* qualunque punto *D*, ſi tagli dall' altro lato *AC* la parte *AE* uguale alla *AD* [c], e congiunta *DE* [d], ſopra di queſta, dalla banda oppoſta all' angolo dato, ſi deſcriva un triangolo equilatero *DFE* [e], indi ſi congiunga *AF* [d]: queſta dividerà l' angolo dato in due parti eguali, perchè ne' triangoli *ADF*, *AEF*, eſſendo eguali i lati *AD*, *AE*, il lato *AF* comune, e le baſi *FD*, *FE* altresì uguali, ſarà pure l' angolo *DAF* uguale all' altro *EAF* [f]; dunque dalla retta *AF* è diviſo per mezzo l' angolo dato *BAC*; il che, ec.

FIG. 20.

c *Prop.* 3.

d *Dimanda* 1.

e *Propoſ.* 1.

f *Prop.* 8.

PRO-

PROPOSIZIONE X. PROBL.

Data una retta terminata A B, *dividerla in due parti uguali.*

FIG. 21. a Prop. 1. b Propos. 9. c Prop. 4.

SI faccia sopra di essa il triangolo equilatero *A CB* [a], e dividasi per mezzo l' angolo *C* colla retta *CE* [b]: ne' due triangoli *ACE*, *BCE* essendo il lato *CA* uguale a *CB*, ed il lato *CE* comune, e gli angoli, compresi da essi, uguali tra di loro, la base *AE* sarà uguale alla *BE* [c], e però tutta la *AB* è divisa egualmente per mezzo; il che, ec.

PROPOSIZIONE XI. PROBL.

Alla data retta linea A B, *alzare da un punto* C *dato in essa, la perpendicolare* C F.

FIG. 22. d Prop. 3. e Prop. 1. f Dimanda 1. g Prop. 8. h Defin. 10. 11.

PReso nella medesima qualunque altro punto *D*, si ponga dall' altra parte la *CE* uguale a *CD* [d], e sopra tutta la *DE* si formi il triangolo equilatero [e] *DFE*, e congiunta la retta *FC* [f], sarà la perpendicolare ricercata, perchè ne i triangoli *DCF*, *ECF*, essendo eguali i lati *DC*, *CE*, il lato *CF* comune, e le basi *DF*, *EF* uguali, sarà l' angolo *DCF* eguale al suo adiacente *ECF* [g], e però amendue saranno retti, e la linea *FC* perpendicolare alla *AB* [h], alzata sopra di essa dal dato punto *C*; il che, ec.

PROPOSIZIONE XII. PROBL.

Tav. II. FIG. 23.

Da un punto C *dato fuori della linea* A B *indefinitamente prolungata, tirarvi sopra una perpendicolare* C H.

Si

SI pigli dall' altra parte di essa linea qualunque punto *D*, e col centro *C*, all' intervallo *CD* descrivasi un arco di cerchio [a], il quale segherà la data retta in due punti *G*, *E*; indi segata per mezzo la *GE* in *H* [b], e congiunta *CH* [c], sarà questa la perpendicolare ricercata; perchè essendo *GH* eguale ad *HE*, *CH* comune a i triangoli *GHC*, *EHC*, e le basi *CG*, *CE* raggi del cerchio eguali [d], sarà l' angolo *CHG* eguale al conseguente *CHE* [e] onde l uno, e l' altro è retto, e la *CH* è perpendicolare alla retta *AB* [f], tiratavi dal punto *C* dato fuori di essa; il che, ec.

a Dimanda 3.
b Prop. 10.
c Dimanda 1.
d Defin. 14.
e Prop. 8.
f Defin. 10. e 11.

AVVERTIMENTO.

Essendosi fin quì minutamente citate le precedenti proposizioni, le dimande, gli assiomi, e le definizioni, stimo superfluo il seguitare in avvenire a citarle così minutamente; però supponendole ormai notissime, lascerò, che i principianti le ritrovino da se stessi, e solo si citeranno per qualche volta le nuove proposizioni, acciò si rendano familiari, onde poi sarà superfluo il rinfrescarne la memoria, avendone già fatta pratica, e si stimerebbe troppa puerilità il continuare di rammentarle a i Geometri già provetti.

PROPOSIZIONE XIII.

Quando una linea retta EC *è applicata sopra di un altra* AB, *o farà con essa li due angoli di qua, e di la retti, o almeno la somma di essi sarà eguale a due retti.* FIG. 4.

PErchè se fosse *EC* perpendicolare ad *AB*, certo che ne risulterebbero di quà, e di la gli angoli retti, ma se è inclinata, si tiri dal medesimo punto *C* la perpendicolare *CD* alla data *AB* [a]; dunque gli angoli *ACD*, *BCD* saranno due retti; ma si adattano a questi due retti gli altri due *ACE*, *BCE*, dunque ancora questi due angoli uguagliano la somma di due retti [b]; il che dovea dimostrarsi.

a Prop. 11.

b Assiom. 5.

PROPOSIZIONE XIV.

FIG. 24.

Se al medesimo punto B *della retta* AB *congiunte da destra, e da sinistra due rette* DB, CB. *comprenderanno con essa due angoli* DBA, CBA *eguali a due retti, saranno esse linee* DB, CB *per diritto fra loro, cioè saranno una sola retta linea* CBD.

ALtrimenti prolungata la *CB*, se cadesse fuori della retta *BD*, come in *BE*, sarebbero gli angoli pure *EBA*, *CBA* uguali a due retti [c], cioè alli due *DBA*, *CBA*, dunque tolto di comune *CBA*, sarebbero gli angoli *EBA*, *DBA* eguali, cioè il tutto alla parte; il che è impossibile; dunque le rette *CB*, *BD* sono per diritto fra loro, e fanno una retta continua; il che, ec.

c Prop. 13.

PROPOSIZIONE XV.

FIG. 25.

Segandosi fra di loro due rette AB, CD *nel punto* E, *gli angoli contrapposti alla cima*, AEC, BED *saranno eguali*.

PErchè sopra la *AB* stando la *CE*, farà gli angoli *AEC*, *CEB* eguali a due retti [c], e così

sì ancora la *BE* sopra la *CD* fa gli angoli *BED*, *CEB* eguali a due retti, e però eguali alli due *AEC*, *CEB*; dunque tolto di comune *CEB*, resta l'angolo *AEC* eguale a *BED*. Similmente si proverà essere l'angolo *CEB* eguale al suo contrapposto *DEA*, facendo pure ciascheduno di questi coll'angolo *BED*, due angoli eguali a due retti; dunque le rette, che si segano, fanno gli angoli alla cima contrapposti eguali; il che, ec.

COROLLARIO. Da ciò può comprendersi, che tutti gli angoli fatti intorno al punto del segamento da due, o più linee rette, sono uguali a quattro retti.

PROPOSIZIONE XVI.

Di qualunque triangolo ABC *prolungando un lato* BC *verso* D, *l'angolo esteriore* ACD, *che ne risulta, è maggiore di qualunque delli due interni opposti* BAC, ABC.

FIG. 26.

DIviso il lato *AC* per mezzo in *E*, congiunta *BE* si prolunghi in *F*, posta *EF* eguale a *BE*, indi si congiunga *FC*. Li triangoli *AEB*, *CEF*, intorno alla cima *E* avendo gli angoli eguali [a], e i lati *BE*, *EA* dell'uno essendo eguali a i lati *FE*, *EC* dell'altro, ancora gli altri angoli corrispondenti *BAE*, *FCE* saranno eguali; ma l'angolo *ACD* è maggiore della sua parte *FCE*, dunque è maggiore dell'angolo opposto *BAE*. Similmente prolungando il lato *AC* in *G*, diviso *BC* per mezzo in *H*, e congiunta *AH*, se si prolunga in *I*, di maniera, che *HI* riesca eguale ad *AH*, congiunta *IC*, si proverà ne i triangoli *ABH*, *CIH* essere l'angolo *ABH* eguale ad *ICH*, di cui es-

[a] Prop. 15.

sendo maggiore l' angolo BCG, il quale uguaglia ACD [a], esso angolo ACD parimente sarà maggiore di ABH; dunque l' angolo esterno ACD è maggiore di qualunque interno opposto BAC, ABC, preso separatamente l' uno dall' altro. Il che, ec.

a Prop. 15.

PROPOSIZIONE XVII.

Due angoli di qualsivoglia triangolo sono sempre minori di due retti.

DEl triangolo ABC prolungato il lato BC in D, l' angolo interno BAC è minore dell' esterno ACD [b], dunque di comune aggiungendo l' angolo ACB, saranno li due BAC, e ACB presi insieme, minori delli due ACD, e ACB, la cui somma essendo uguale a due retti [c], dunque la somma delli due interni BAC, ACB è minore di due retti. Similmente si proverà essere ABC, e ACB insieme presi minori di due retti; dunque sono sempre due angoli d' un triangolo minori di due retti; il che, ec.

b Prop. 16.
c Prop. 13.

PROPOSIZIONE XVIII.

FIG. 27.

Se nel triangolo ABC *il lato* AB *è maggiore del lato* AC, *l' angolo* ACB *opposto al primo, sarà maggiore dell' angolo* ABC *opposto al secondo lato.*

SI tagli da BA la parte AD eguale ad AC, e si congiunga CD. Sarà l' angolo ACD eguale ad ADC [d], e questo è maggiore dell' interno ABC [b], dunque l' angolo ACD, e molto più il tutto ACB, è maggiore dell' angolo ABC; il che, ec.

d Prop. 5.

PRO-

PROPOSIZIONE XIX.

Viceversa qualunque volta sia l'angolo ACB *maggiore dell'angolo* ABC *in un medesimo triangolo, sarà il lato opposto al primo* AB *maggiore del lato* AC *opposto al secondo.*

PErchè se i lati suddetti fossero uguali, ancora gli angoli *ACB*, *ABC* sarebbero uguali [a]; se *AC* fosse maggiore di *AB*, sarebbe l' angolo *ABC* maggiore di *ACB* [b]; dunque essendo *ACB* maggiore di *ABC*, bisogna che sia il lato *AB* maggiore di *AC*: il che ec.

a Prop. 5.

b Prop. 18.

PROPOSIZIONE XX.

In ogni triangolo ADC, *sono due lati qualunque* AD, *e* DC *presi insieme, maggiori del terzo* AC.

SI prolunghi *AD*, e pongasi in esso *DB* eguale a *DC*. Congiunta *BC*, sarà l'angolo *DCB* eguale all' angolo *B* [a], ma *ACB* è maggiore di *DCB*, dunque *ACB* è maggiore dell' angolo *B*; e però nel triangolo *ABC* il lato *AB* sarà maggiore di *AC* [c]; ma *AB* è uguale alli due lati *AD*, *DC*, dunque sono questi maggiori del terzo *AC*: il che, ec.

c Prop. 19.

PROPOSIZIONE XXI.

FIG. 18.

Se dagli estremi della base BC *si conducano le rette* BD, CD, *concorrenti nel punto* D *dentro il triangolo* ABC, *saranno le due rette* BD, CD *minori delle due* BA, CA, *ma quelle conterranno l' angolo* BDC *maggiore dell' angolo* BAC *contenuto da queste.*

SI prolunghi *BD* fino che concorra col lato *AC* in *E*: saranno le due *BA*, *AE* maggiori di *BE* [a], dunque aggiunta di comune *EC*, sono *BA*, e *AC* maggiori di *BE*, *EC*; e perchè *DE*, con *EC* sono maggiori di *CD* [a], e aggiunta *DB*, sono *BE*, ed *EC* maggiori di *BD*, e *CD*; dunque le due *BA*, *AC* maggiori sono delle due *BD*, *CD*; ma l'angolo *BDC* è maggiore di *CED* [b], ed è *CED* maggiore di *BAC* [b], dunque *BDC* è maggiore di *BAC*; il che dovevasi dimostrare.

a Prop. 20.

b Prop. 16.

PROPOSIZIONE XXII. PROBL.

FIG. 29.

Date tre linee rette A, B, C, *due delle quali siano maggiori della terza, formarne un triangolo* FKG.

NElla retta *DH* si distinguano le parti *FG*, *GH*, *FD* respettivamente eguali alle date *C*, *B*, *A*, e fatto centro in *F*, coll'intervallo *FD* descrivasi il cerchio *DK*, e fatto centro in *G* coll'intervallo *GH* si descriva l'altro cerchio *HK*, e dove questi cerchi concorrono in *K*, si congiungano a i centri le rette *KF*, *KG*; sarà nel triangolo *FKG* il lato *FG* eguale a *C*; il lato *GK* eguale a *GH*, cioè a *B*, ed il lato *FK* eguale ad *FD*, cioè ad *A*; dunque si è fatto il triangolo colle date tre linee; il che, ec.

PROPOSIZIONE XXIII. PROBL.

FIG. 30.

Nella data retta linea AB, *al punto* A *dato in essa, costituire un angolo eguale al dato* FDE.

Ti-

TIrata sotto l'angolo dato qualunque retta *FE*, si faccia un triangolo con tre linee uguali alle date *FE*, *FD*, *DE* [a], in maniera che le due *AB*, *AC* uguaglino le due *ED*, *DF*, e la *BC* sia uguale alla *FE*; è manifesto, che l'angolo *BAC* sarà uguale all'angolo dato *FDE* [b]. Dunque sarà fatto ciò, che era proposto.

a Prop. 22.

b Prop. 8.

PROPOSIZIONE XXIV.

Se due triangoli ABC, DEF *averanno due lati* AB, AC *uguali alli due* DE, DF, *l'uno all'altro rispettivamente, ma l'angolo* BAC *sia maggiore di* EDF, *la base* BC *sarà altresì maggiore della base* EF.

NElla linea *AB* costituiscasi al punto *A* l'angolo *BAG* eguale ad *EDF* [c], e fatta la *AG* eguale alla *DF*, si congiunga *BG*, la quale sarà ad *EF* uguale [d]; e se il punto *G* cade sopra la retta *BC*, è chiaro, che sarà *BG* minore di *BC*, essendo una sua parte; se cade sopra, essendo le due *AG*, *BG* minori delle due *AC*, *BC* [e], ed essendo eguale *AG* ad *AC*, perchè ciascuna di esse uguaglia *DF*, dovrà essere *BG* minore di *BC*; se poi il punto *G* riesce al di sotto, congiunta *CG* sarà il triangolo *ACG* equicrure, onde l'angolo *ACG*, sarà eguale ad *AGC* [f], ma l'angolo *BGC* è maggiore di *AGC*, e conseguentemente di *ACG*, e molto più di *BCG*, dunque *BC* è maggiore di *BG* [g]. Però sempre essendo *BC* di *BG* maggiore, sarà pure maggiore di *EF*; il che, ec.

c Prop. 23.

d Prop. 4.

e Prop. 21.

f Prop. 5.

g Prop. 19.

PROPOSIZIONE XXV.

Se il triangolo ABC *ha li due lati* AB, AC *eguali a quelli* ED, DF *del triangolo* DEF, *ma la base* BC *sia maggiore della base* EF, *l'angolo* BAC *sarà pure maggiore dell'angolo* EDF.

PErchè se ancora li due angoli *BAC*, *EDF* fossero uguali, sarebbero le basi *BC*, *EF* eguali [a]; e se fosse *BAC* minore di *EDF*, sarebbe *BC* minore di *EF* contro l'ipotesi [b]. Dunque *BAC* è maggiore di *EDF*.

a Pop. 4.
b Prop. 24.

PROPOSIZIONE XXVI.

FIG. 31.

Ne i due triangoli ABC, DGE; *se due angoli* B, C *dell'uno sono eguali a gli angoli* DGE, GED *dell'altro, ed un lato intercetto fra i detti angoli* BC *sia eguale al lato* GE *interposto fra gli altri due angoli del secondo, eguali a quelli del primo: o pure un lato* AB *opposto ad uno di essi angoli* C, *uguagli il lato* DG *opposto all'angolo* E *uguale ad esso* C; *saranno gli altri lati dell'uno eguali a quelli dell'altro, e l'angolo rimanente al rimanente, e tutto il triangolo primo a tutto il secondo sarà uguale.*

IMperocchè quando *BC* uguaglia *GE*, se non fosse ancora *CA* eguale ad *ED*, sia uno di essi per esempio *ED* maggiore dell'altro *CA*, e tagliandone *FH* uguale ad *AC*, congiunta *GH*, riuscirebbe l'angolo *EGH* eguale all'angolo *B* [a], ma questo supponevasi eguale a *DGE*. dunque la parte *FGH* sarebbe uguale al tutto *DGE*; il che è impossibile; erano dunque eguali ancora i lati *CA*, e *ED*,

e *ED*, e conseguentemente ancora *BA* era uguale a *GD*, e l'angolo *A* all'angolo *GDE*, e tutto il triangolo a tutto il triangolo [a]. Se poi solamente si supponesse il lato *AB* eguale a *DG*, sarebbe ancora *BC* eguale a *GE*; altrimenti se fosse uno di essi, per esempio *GE*, maggiore di *BC*, posta *GI* eguale a *BC*, sarebbe l'angolo *GID* eguale a *BCA* [a], ma *GID* è maggiore di *GED* [b] dunque *BCA* non sarebbe eguale a *GED*, contro l'ipotesi; bisogna dunque, che ancora i lati *BC*, *GE* siano eguali, e però ancora *AC* a *DE*, e l'angolo *A* all'angolo *GDE*, e tutto il triangolo a tutto il triangolo; Il che ec.

a Prop. 4.

b Prop. 16.

PROPOSIZIONE XXVII.

Se due rette linee AB, CD *sono segate da un altra* EF, *in maniera che gli angoli alterni* AEF, DFE, *di quà, e di là riescano eguali, esse linee* AB, CD *saranno parallele*.

FIG. 32.

PErchè, se prolungate convenissero in un punto *G*, dovrebbe l'angolo esterno *AEF* essere maggiore dell'interno *DFE* [b]; ma gli è eguale, dunque non convengono esse rette *AB*, *CD* in veruna parte; e però sono parallele [c]; Il che ec.

c Defin. 30.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Parimente saranno parallele le rette AB, CD, *se l'angolo esterno* AGE *sarà eguale all'interno opposto dalla medesima parte* CHG: *ovvero, se li due interni dalla stessa banda* AGH, CHG *siano eguali a due retti*.

FIG. 33.

Im-

IMperocchè in tal caso sarebbe l' angolo *HGB*, il quale uguaglia *AGE* [a]; eguale a *CHG* alterno: siccome essendo *HGB* con *AGH* eguale a due retti [b], se sono *AGH*, *CHG* pure a due retti uguali, bisognerà sia *HGB* eguale al detto *CHG* alterno; dunque le rette *AB*, *CD* in qualunque di questi due casi debbono essere parallele [c]. Il che ec.

a Prop. 15.
b Prop. 13.
c Prop. 27.

AVVERTIMENTO.

Servendosi Euclide nella seguente Proposizione del suo Assioma, da noi posto nel numero VIII. *in cui dicesi, che* se due linee rette siano segate da una terza, in maniera, che da una parte ne risultino due angoli interni minori di due retti, e dall' altra banda maggiori, prolungate in infinito quelle due rette dalla banda, ove sono gli angoli minori, dovranno insieme concorrere; *ed avendo ivi indicato, di doverne in questo luogo dimostrare la verità, ed evidenza di questo Assioma, ne addurrò quì una prova addotta dal P Clavio, esposta però più brevemente, che sia possibile.*

I. *Si osservi primieramente, che se sopra la retta* BH *eretta una perpendicolare* BP, *la retta* PX *con essa* BP *farà un angolo acuto* BPX, *le altre perpendicolari* RQ, TS *erette sopra la medesima* BH, *ed alla stessa* PX *terminate, vanno decrescendo, imperocchè condotta la* BQ *perpendicolare sopra la* PX (*che caderà dalla banda dell' angolo acuto, dovendo li due angoli* BPQ, BQP *essere minori di due retti* [d], *e non un retto, ed uno ottuso nel triangolo* QBP) *indi sopra la* BH *condotta la perpendicolare* QR, *e la* RS *perpendicolare*

FIG. 34.
d Prop. 17.

re alla PX, *e la* ST *perpendicolare alla* BH *ec.* *è manifesto, che sarà* BP *maggiore di* BQ, *e questa* BQ *maggiore di* QR, *e la* QR *maggiore di* RS, *e la* RS *maggiore di* ST *ec.* [a] *essendo opposte all' angolo retto, che è il maggiore angolo in qualunque di tali triangoletti.*

[a] Prop. 19.

II. *Similmente facendo la retta* PX *sopra la* ST *perpendicolare a* BH, *l' angolo ottuso* TSP, *le altre perpendicolari* QR, PB *ec. condotte sopra la stessa* BH, *dalla banda di questo angolo ottuso, si fanno sempre maggiori, essendo* SR *maggiore di* ST, *e* RQ *maggiore di* RS, *e* QB *maggiore di* RQ, *e* BP, *maggiore di* QB, *come nel* §. *antecedente.*

III. *Quindi ne segue, che essendo sopra la retta* BT *alzate due perpendicolari* TS, BZ, *tra di loro uguali, connessa la retta* SZ, *farà gli angoli* SZB, ZST *ambidue retti: perchè se uno di essi fosse acuto, o pure ottuso, le dette perpendicolari* ZB, ST *non sarebbero uguali, ma decrescerebbero, o si farebbero maggiori l' una dell' altra, come ne'* §. §. *precedenti si è dimostrato.*

IV. *Ciò supposto: se la retta* AP *sega le due* PD, AL *in maniera, che gli angoli* APD, PAL *riescano minori di due angoli retti, dico che prolungate le rette* PD, AL *dovranno verso quella parte concorrere. Imperocchè verso l' angolo acuto* APD *tirata la perpendicolare* AB *dal punto* A *sopra la* PD, *si prenda nella* AL *qualunque punto* E, *e sopra la* AB *si tiri la perpendicolare* EF; *indi presa* EK *eguale ad* AE, *e prodotta* EM *eguale ad* EF, *congiunta* KM *sarà ancor essa eguale ad* AF, *e l' angolo* EMK *eguale al retto* AFE, *giacchè li due lati* EK, EM *sono eguali alli due*

AE,

AE, EF *intorno gli angoli eguali alla cima* E; *però presa* FG *eguale ad* AF *sarà eguale ad* MK, *e congiunta* GK *farà pure angoli retti con la* AG, *come si cava da ciò, che si è dimostrato al* num. III. *mentre le rette* MK, FG *sono eguali, e perpendicolari alla retta* FM.

V. *Quindi se alla* AK, *si prenderà eguale la* KL, *ed alla* AG *sia eguale la* GH, *prolungata* GK *in* N, *in maniera, che uguagli la* GK, *congiunta* LN *si proverà similmente eguale ad* AG, *e l'angolo* N *retto come* AGK, *e congiunta* LH *sarà pure perpendicolare alla* AH: *e ponendosi* LC *eguale ad* AL, *ed* HI *uguale ad* AH, *congiunta* CI *sarà pure alla medesima* AI *perpendicolare*.

VI. *E perchè presa* FG *eguale ad* AF, *e* GH *eguale ad* AG, *ed* HI *eguale ad* AH, *e così proseguendo, verrà una volta la* AI *maggiore della* AB, *e così la retta* BD *rimarrà inclusa dentro il triangolo* AIC, *dunque prolungata la* BD *dovrà uscire fuori dello spazio finito di questo triangolo; e non potendo concorrere con la base* IC, *perchè essendo li due angoli* DBI, CIB *eguali a due retti, le rette* BD, IC *sono parallele* [a], *dunque converrà la* BD *col lato* AC *in* V; *e però le rette* PBD, AL *segate dalla* AP, *o dalla* AB *con due angoli minori di due retti, prolungate verso quella banda, necessariamente insieme converranno in* V. *Il che dovea dimostrarsi*.

a Prop. 28.

PROPOSIZIONE XXIX.

FIG. 53.

Segandosi due linee parallele AB, CD *da una retta* EF, *saranno li due angoli interni da qualunque parte, come* AGH, CHG *eguali a due* ret-

retti, e l'esteriore BGE *uguale all' interno opposto dalla medesima parte* GHD, *e gli alterni* DHG, AGH *tra di loro uguali*.

PErchè, se gli interni *AGH*, *CHG* non fossero eguali a due retti, o sarebbbero essi, o li susseguenti *BGH*, *DHG*, minori di due retti, onde non sarebbero le rette *AB*, *CD* parallele, ma converrebbero insieme [a]. Dunque debbono essere li due angoli interni da qualsivoglia parte eguali a due retti; ed a due retti essendo pure eguali tanto li due *EGB*, *BGH*, quanto li due *AGH*, *BGH*, sarà qualunque di queste coppie uguale alli due interni *DHG*, e *BGH*; e però tolto di comune esso *BGH*, rimarrà *DHG* eguale, sì all' esterno *BGE*, come all' alterno *AGH*; il che &c.

a *Assioma* 8. *sopra dimostrato*.

PROPOSIZIONE XXX.

Se le rette AB, CD *saranno parallele ad una terza* EF, *saranno pure tra di loro parallele*.

FIG. 35.

PErchè segandosi tutte e tre da una retta *GK*, ne punti *G*, *H*, *K*, l' angolo *AGK*, sarà eguale all' alterno *GHF* [b], e questo eguale all' interno opposto *DKH*; dunque li due *AGK*, *DKH*, che sono alterni tra le due rette *AB*, *CD*, saranno uguali; e però queste rette saranno parallele tra di loro [c], essendo ciascuna parallela alla medesima terza *EF*; il che doveva dimostrarsi.

b *Prop*. 29.

c *Prop*. 27.

PROPOSIZIONE XXXI. PROBL.

Per un dato punto H *tirare una linea* CD *parallela ad un altra linea data* AB.

FIG. 33.

Si

SI tiri da esso punto sopra la data linea *A B* qualunque retta *HG*; indi all'angolo *A G H* si faccia eguale l'angolo *G H D*[a], sarà la retta *D H C* parallela alla data *A B*[b]; il che doveva eseguirsi.

a Prop. 23.
b Prop. 27.

PROPOSIZIONE XXXII.

FIG. 36.

In qualunque triangolo A B C, *prolungando fuori un lato* B C *verso* D, *sarà l'angolo esterno* A C D *eguale alli due interni opposti* C A B, C B A *presi insieme: e tutti tre gli angoli di esso triangolo* C A B, C B A, B C A *interni sono eguali a due retti*.

SI tiri dal punto *C* la retta *C E* parallela ad *A B*[c]; sarà l'angolo *A C E* eguale all'alterno *C A B*, e l'esterno *E C D* uguaglierà l'interno opposto *A B C*[d]; dunque l'angolo *A C D* è uguale a tutti due gl'interni opposti *C A B*, *C B A*; e tanto a quello, che a questi due aggiunto l'angolo rimanente interno *B C A*, sono li tre angoli interni *C A B*, *C B A*, *B C A* eguali alli due *A C D*, *B C A*, li quali uguagliano due retti[e]. Però li tre angoli interni di qualunque triangolo uguagliano due retti; il che ec.

c Prop. 31.
d Prop. 29.
e Prop. 13.

PROPOSIZIONE XXXIII.

FIG. 37.

Le rette A C, B D, *che congiungono dalle stesse parti li termini delle rette* A B, C D *parallele, ed uguali, riescono ancor esse uguali, e parallele*.

SI connettano colla retta *C B* gli angoli opposti, saranno intorno a gli angoli *A B C*, *B C D* uguali[f], essendo alterni di due parallele, il lato *A B* eguale al lato *C D*, ed il lato *C B* comune, dunque le basi *A C*, *B D* sono uguali[g], e gli altri angoli corrispondenti *B C A*, *C B D* pure saranno eguali

f Prop. 29.
g Prop. 4.

guali, e però essendo alterni, le stesse rette *AC*, *BD* sono parallele [a]. Dunque ec.

a Prop. 27.

PROPOSIZIONE XXXIV.

Ne' quadrilateri, li cui lati opposti sono paralleli, e però chiamansi PARALLELOGRAMMI. *come* ABDC, *gli opposti lati sono sempre eguali, e gli angoli opposti eguali, e da un angolo all' altro opposto tirata la* BC, *che dicesi suo* DIAMETRO, *rimane detto spazio diviso in due triangoli eguali* ABC, DCB.

IMperocchè tali triangoli hanno due angoli eguali a due angoli, ed un lato comune *BC*, essendo gli alterni *ABC*, *BCD* eguali, e gli alterni *BCA*, *CBD* pure eguali [b], onde le basi *AC*, *BD* saranno uguali, ed ancora gli angoli opposti *A*, *D* uguali saranno, e gli altri due *ABD*, *ACD*, e tutto il triangolo *ABC* all' altro *DCB* [c], e però il parallelogrammo dal diametro *BC* è diviso per mezzo; il che ec.

b Prop. 29.

c Prop. 26.

PROPOSIZIONE XXXV.

Li parallelogrammi ABCD, BCFE, *sopra la stessa base* BC, *fra le medesime parallele* BC, AF *descritti, sono tra di loro uguali*.

FIG. 38.

IMperocchè il lato *AD*, ed il lato *EF* essendo uguali al medesimo opposto *BC* [d], sono uguali tra loro, ed aggiunta la comune *DE*, sarà *AE* uguale a *DF*; ed *AB* uguaglia *DC* [d], e l' angolo *BAE* è eguale a *CDF* [b], dunque il triangolo *ABE* è uguale all' altro *CDF*; e tolto il comune *DGE*, saranno eguali i trapezii *ADGB*, *CGEF*; indi aggiun-

d Prop. 34

giunto all' uno, ed all' altro il triangolo *BGC*, sarà il parallelogrammo *ABCD* eguale all' altro *BCFE*; il che dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE XXXVI.

Se poi li parallelogrammi ABCD, EFGH, *tra le stesse parallele* AH, BG *disposti saranno sopra eguali basi* BC, FG, *saranno pure tra di loro eguali.*

FIG. 39.

PErchè tirate le rette *BE, CH*, riusciranno ancora esse parallele [a] essendo le parallele *BC, EH* uguali, giacchè tanto questa, che quella è uguale ad *FG*; dunque *BCHE* è un parallelogrammo eguale ad *ABCD*, per essere su la stessa base *BC*, ed eguale pure ad *EFGH* [b], con cui ha la medesima base *EH*, fra le stesse parallele *AH, BG*; però li detti parallelogrammi *ABCD, EFGH* sono tra di loro uguali; il che ec.

a *Prop.* 33.

b *Prop.* 35.

PROPOSIZIONE XXXVII.

Li triangoli BDC, BEC *constituiti su la medesima base* BC, *e tra le stesse parallele* BC, AE, *sono pure tra di loro uguali.*

IMperocchè tirata la *BA* parallela a *CD*, e la *CH* parallela a *BE*, ne risultano due parallelogrammi *ABCD, EBCH*, li quali sono su la stessa base, e fra le medesime parallele, e però sono tra di loro uguali [b]; dunque li triangoli *BDC, BEC*, che sono la metà di essi parallelogrammi [c], sono pure tra di loro uguali [d]; il che ec.

c *Prop.* 34.

d *Assiom.* 4.

PRO-

PROPOSIZIONE XXXVIII.

Li triangoli BCD, FHG *sopra eguali basi* BC, FG *disposti fra le stesse parallele* BG, DH, *sono pure tra di loro uguali*.

Condotte le rette *BA* parallela a *CD*, ed *FE* parallela a *GH*, riescono due parallelogrammi *ABCD*, *EFGH* sopra basi eguali costituiti, e fra le medesime parallele, che però sono fra di loro eguali [a], dunque ancora detti triangoli, che sono le loro metà [b], sono pure tra di loro uguali [c]; il che ec.

a *Prop.* 36
b *Prop.* 34
c *Assiom.* 4

PROPOSIZIONE XXXIX.

FIG. 40.

Se due triangoli BAC, BDC *costituiti sopra la stessa base* BC, *verso la medesima parte, sono uguali tra loro, la retta* AD, *che le loro cime congiunge, riesce parallela alla base* BC.

Altrimenti, se non gli fusse parallela, si tiri *AE* parallela a *BC*, la quale seghi il lato *BD* sopra, o sotto la cima *D*, nel punto *E*. Congiunta la retta *CE* riuscirebbe il triangolo *BEC* uguale a *BAC* [d], e però uguale all' altro triangolo *BDC*, onde la parte sarebbe uguale al tutto; il che è impossibile [e]; dunque la *AD* era parallela alla base *BC*, come dovea dimostrarsi.

d *Prop.* 37.
e *Assiom.* 6.

PROPOSIZIONE XL.

FIG. 41.

Similmente se sopra due porzioni uguali BC, EF *della medesima linea* BF, *siano costituiti verso la medesima parte due triangoli uguali* BAC, EDF, *la retta* AD, *che connette le loro cime, sarà parallela a* BF.

Se tale non fosse, tirata la *AH* parallela à *BF* segherebbe il lato *ED* in *H*, sopra, o sotto la cima *D*; e congiunta la *FH*, sarebbe il triangolo *EHF* uguale ad *ABC* [a], e però uguale ad *EDF*, il che è assurdo [b]; adunque non altra linea, che la *AD* condotta dal punto *A* può essere parallela a *BF*; il che ec.

a *Prop.* 38.
b *Assiom.* 6.

PROPOSIZIONE XLI.

FIG. 39.

Se il parallelogrammo ABCD *ha la stessa base* BC *col triangolo* BEC, *disposto fra le stesse parallele* BC, AE, *sarà il parallelogrammo duplo di detto triangolo.*

Imperocchè tirata la retta *BD*, saranno li triangoli *BDC*, *BEC* uguali [c]; dunque essendo *ABCD* duplo di *BDC* [d], sarà pure duplo di *BEC*; il che ec.

c *Prop.* 37
d *Prop* 34.

PROPOSIZIONE XLII. PROBL.

FIG. 41.

Ad un dato triangolo ABC *fare un parallelogrammo eguale* FECG *con un angolo uguale ad un dato* D.

Dal punto *A* condotta la retta *AG* parallela alla base *BC*, e questa per mezzo divisa in *E*, si faccia l'angolo *CEF* uguale al dato *D* [e], e condotta *GG* parallela ad *EF*, sarà il parallelogrammo *FECG* al dato triangolo *ABC* uguale; perchè tirata la retta *AE*, essendo uguali le basi *BE*, *EC*, sono uguali li triangoli *BAE*, *EAC* [a] e però sarà *ABC* duplo del triangolo *AEG*, di cui essendo ancora duplo il parallelogrammo *FECG* [f], sarà dunque al triangolo *ABC* uguale il detto parallelogrammo, con l'angolo *CEF* uguale al dato *D*, come era da farsi.

e *Prop.* 23.
f *Prop.* 41.

PRO-

PROPOSIZIONE XLIII.

In ogni parallelogrammo ABCE, *condotto il diametro* AC, *e per qualunque punto* G *di esso condotte le rette* IGF, HGK *parallele a' lati* AB, BC, *saranno li parallelogrammi* BIGK, HGFE (*che si chiamano* COMPLEMENTI) *tra di loro uguali.* FIG. 43.

IMperocchè essendo tutto il triangolo *ABC* uguale ad *AEC*, ed il triangolo *AKG* uguale ad *AFG*, ed il triangolo *GIC* uguale a *GHC* [a], sarà il rimanente spazio *BIGK* uguale al rimanente *HGFE*; il che ec.

[a] Prop. 34.

PROPOSIZIONE XLIV. PROBL.

Ad una data retta GF, *nell' angolo dato* D, *applicare un parallelogrammo* HGFE, *uguale ad un dato triangolo* L.

SI faccia un parallelogrammo *IGKB* uguale al detto triangolo *L* nell' angolo *IGK* uguale al dato *D* [b], e posta la data *GF* per diritto al lato *IG*, si compisca il parallelogrammo *KGFA*, e si tiri il diametro *AG*, che prolungato concorrerà col lato *BI*, in *C* [c], e condotta *CE* parallela ad *AB*, si prolunghino ad essa le rette *KG*, *AF* in *H*, *E*; sarà il parallelogrammo *HGFE* un complemento uguale all' altro *IGKB* [d], e però uguale al dato triangolo *L*, ed applicato alla data retta *GF*, con l' angolo *HGF* uguale ad *IGK*, e però uguale al dato angolo *D*; il che dovea farsi.

[b] Prop. 42.
[c] Assiom. 8.
[d] Prop. 43.

PROPOSIZIONE XLV. PROBL.

Alla data retta FG *applicare un parallelogrammo* FIG. 44.

mo GFKL, *eguale ad un dato rettilineo* ABCD, *con un angolo uguale al dato* E.

SI risolva il rettilineo in triangoli *ABD*, *BCD*, (ed in più altri, se avesse più lati). Indi nel dato angolo *E* facciasi, applicato alla retta *FG* il parallelogrammo *FGHI*, uguale al triangolo *ABD* [a], e prolungata la retta *GH*, si formi nell' angolo *IHL*, applicato alla retta *HI*, il parallelogrammo *LHIK* eguale all' altro triangolo *BCD* (e così proseguiscasi, se vi sono altri triangoli annessi) è manifesto, che tutto il parallelogrammo *GFKL*, applicato alla retta *GF*, nell' angolo *FGH* uguale ad *E*, sarà uguale a tutto il dato rettilineo, essendo la prima sua parte uguale al primo triangolo, e la seconda al secondo ec. il che ec.

a *Prop.* 44.

PROPOSIZIONE XLVI. PROBL.

FIG. 7.

Sopra una data retta linea AB *descrivere il suo quadrato* ABCD.

SI alzi dal punto *A* sopra la data *AB* la perpendicolare *AD*, uguale alla medesima *AB*, e si tirino *DC* parallela ad *AB*, e *BC* parallela alla *AD*. Saranno i lati opposti uguali, ed ancora gli angoli opposti uguali, essendo questo pure un parallelogrammo [b], dunque essendo uguali *AB*, ed *AD*, saranno pure tutti i lati uguali, e tutti gli angoli retti, perchè le parallele avendo gli angoli interni uguali a due retti [c], siccome è retto l' angolo *BAD*, così pure è retto *ABC*, e così *CDA*; però *ABCD* è un quadrato [d], che dovea farsi sopra la data *AB*.

b *Prop.* 34.
c *Prop.* 28.
d *Defin.* 23.

PRO-

PROPOSIZIONE XLVII.

In qualunque triangolo rettangolo ABC, *il quadrato* BDEC *descritto sopra il lato* BC *opposto all'angolo retto, uguaglia li due quadrati* ABFG, ACIH, *descritti sopra gli altri due lati* AB, AC, *contenenti l'angolo retto* A. FIG. 45.

SI tiri la retta *ALM*, parallela a' lati *BD*, *CE*, e condotte le rette *FC*, *AD*, congiunto l'angolo *ABC* all'uno, e all'altro de' retti uguali *FBA*, *DBC*, sarà l'angolo *FBC* uguale all'angolo *ABD*, ed il lato *FB* essendo uguale al lato *AB*, ed il lato *CB* uguale a *BD*, saranno li triangoli *FBC*, *ABD* uguali; ma essendo *CA* per diritto con la *GA*, mercè li due angoli retti *BAC*, *BAG*, il triangolo *FBC* ha la stessa base col quadrato *ABFG*, ed è tra le medesime parallele, onde *ABFG* è il duplo del triangolo *FBC*[a], e similmente il parallelogrammo *BLMD* è duplo del triangolo *ABD*; dunque il quadrato *ABFG* è uguale a *BLMD*. Parimente condotte le rette *IB*, *AE*, si troveranno uguali i triangoli *ICB*, *ACE*, di cui il doppio sarà uguale, cioè il quadrato *ACIH* uguaglierà *LMEC*; e però li due quadrati de' lati *AB*, *AC* saranno uguali al quadrato del lato *BC* opposto all'angolo retto; il che era da dimostrarsi.

a *Prop.* 41.

PROPOSIZIONE XLVIII.

Viceversa, se il quadrato del lato BC *uguaglia li due quadrati degli altri lati* AB, AC *del triangolo* BAC, *sarà l'angolo* CAB *opposto al lato* BC *necessariamente un angolo retto.* FIG. 46.

IMperocchè dal punto *A* tirata la perpendicolare *AD* sopra il lato *AC*, e tagliando essa *AD* uguale alla *AB*, congiunta poscia *CD*, sarà il quadrato di essa *CD* uguale alli due quadrati di *AC*, e di *AD* [a], cioè di *AC*, e di *AB*, essendo fatta *AD* uguale ad *AB*; dunque il quadrato *CD* è uguale al quadrato *BC*, ed il lato *CD* uguale al lato *BC* ne' triangoli *ADC*, *ABC*, in cui il lato pure *AD* uguaglia il lato *AB*, ed il lato *AC* è comune ad entrambi; dunque l'angolo retto *CAD* è uguale all' angolo *CAB* [b]; e però questo pure è retto, onde esso triangolo *CAB* è rettangolo, come dovea dimostrarsi.

a *Prop.* 47.

b *Propos.* 8.

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
DI EUCLIDE.
LIBRO II.

DEFINIZIONI.

I. OGni parallelogrammo rettangolo dicesi contenuto da que' due lati, che sono d' intorno all' angolo retto.

Così quando si nominerà il RETTANGOLO ABC, *o di* AB *in* BC (*o siano quelle due linee distinte, o congiunte insieme, ò l' una parte dell' altra*) *dovrà intendersi il parallelogrammo* ABCD *fatto da tali lati* AB, *e* BC *congiun-*

Tav. III. FIG. 47.

giunti insieme ad angolo retto, a' quali lati sono pure uguali gli opposti CD, *e* DA *paralleli a' due primi. Ed intanto dicesi esso Rettangolo contenuto da essi lati, perchè se in parti uguali l' uno, e l' altro s' intenda diviso, per esempio* AB *in* 4. *parti*, BC *in* 3. *il prodotto del numero delle parti di* AB *nel numero delle parti* BC, *compone il numero de' quadratelli, i quali compiscono la superficie di tale rettangolo: come* 4, *multiplicato in* 3. *farà dodici quadratini di ciascuna particella de' lati, li quali riempiono il rettangolo* ABCD.

II. In ogni rettangolo *ABCD* preso uno de' rettangoli intorno al diametro; come *AEFH*, con li due complementi *FB*, *FD*, cioè lo spazio *ABIFGD*, si chiamerà GNOMONE. FIG. 48.

PROPOSIZIONE I.

Se di due rette AB, e C, *l' una sia segata in più parti* AE, EF, FB, *il rettangolo compreso da essa* C, *e dall' intiera* AB, *è uguale alla somma de' rettangoli contenuti da essa* C, *e da ciascheduna di tali parti.* FIG. 49.

IMperocchè alla stessa *AB* posta ad angolo retto la *BD* uguale alla *C*, e compiuto il rettangolo *ABDG*, si tirino da' punti *E*, *F*, che dividono essa *AB*, le rette *EH*, *FI* parallele a *BD*: è manifesto, che *ABDG* uguaglia li rettangoli in esso compresi *FBDI*, *EFIH*, *AEHG*; ma quello è contenuto dalla *AB*, e dalla *BD* uguale a *C*, e questi altri si contengono dalle parti *FB*, *FE*, *AE*, e dalle rette *FI*, *EH* uguali a *BD*, e però uguali alla stessa *C*; dunque il rettangolo contenuto dall' intiera *AB*, e dalla *C*, uguaglia la somma de' ret-

tangoli fatti dalla stessa *C*, e da ciascuna delle parti *AE*, *EF*, *FB* dell' intiera *AB*; il che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE II.

FIG. 50. *Segandosi la retta* AB *in due parti* AD, BD, *il quadrato di tutta* ABGF *uguaglia i rettangoli di essa* AB *in ciascheduna parte* AD, BD.

PErchè tirata *DH* parallela al lato *AF*, resta esso quadrato diviso appunto in due rettangoli, l'uno *FADH*, contenuto dalla *AF* (che uguaglia *AB*) e dalla parte *AD*; l'altro *DBGH* contenuto dalla *BG* (pure uguale ad *AB*) e dall' altra parte *DB*; sicchè essendo il tutto uguale alla somma delle sue parti, il quadrato *AB* uguaglia i rettangoli di *AB* in *AD*, e di essa *AB* in *BD*; il che ec.

PROPOSIZIONE III.

FIG. 51. *Essendo pure segata la* AB *nel punto D, il rettangolo di tutta la* AB *nella parte* AD *uguaglia il quadrato di essa* AD, *col rettangolo contenuto da ambe le parti* AD, e BD.

SI alzi perpendicolarmente ad *AB* la retta *AF*, uguale alla parte *AD*, e compiuto il rettangolo *AFGB*, che è contenuto da tutta la *AB*, e dalla parte *AD*, si tiri la *DH* parallela ad *AF*: sarà *FADH* il quadrato di *AD*, ed *HDBG* il rettangolo contenuto dalle parti *AD*, *BD* (essendo *HD* uguale ad *AD*); dunque essendo il rettangolo di *AD* in *AB*, cioè *AFGB*, uguale a questi due spazii, è manifesto, che uguaglia il quadrato *AD*, ed il rettangolo *ADB*.

PRO-

PROPOSIZIONE IV.

Essendo la retta AB *divisa in* C, *il quadrato di tutta la* AB *è uguale a' quadrati delle parti* AC, CB, *ed a' due rettangoli contenuti da esse parti, cioè da* AC *in* CB. FIG. 52.

DEscrivasi esso quadrato *ABDE*, e tirato il diametro *BE* venga segato in *G* dalla *CF* parallela al lato *BD*, e si tiri per *G* la *HGI* parallela ad *AB*. Essendo i lati *AB*, *AE* uguali, l'angolo *AEB* uguaglia l'angolo *ABE* [a], a cui pure è eguale *HGE* [b], dunque sono gli angoli *GEH*, *HGE* uguali, e però *EHGF* è il quadrato di *HG*, cioè di *AC*; similmente *CGIB* si mostrerà essere il quadrato di *CB*, come ancora può dedursi dall'essere tutta la *FC* uguale ad *AB*, e la parte *FG* uguale ad *AC*, e però la rimanente *GC* uguale a *CB*. Li due complementi *ACGH*, *FGID* sono poi contenuti da lati uguali alle parti *AC*, *CB*. Dunque essendo il quadrato *ABDE* uguale alli spazii *EHGF*, *CGIB*, *ACGH*, *FGID*, è manifesto, essere uguale a' quadrati delle parti *AC*, *CB*, ed a due rettangoli contenuti da esse parti; il che era da dimostrarsi.

a 5. 1.
b 29. 1.

Corollario. Li rettangoli, che si fanno intorno il diametro d'un quadrato sono quadrati, come si è dimostrato *EHGF* essere quadrato di *AC*, ed *IBCG* il quadrato di *BC*.

PROPOSIZIONE V.

Se la retta AC *è divisa per mezzo in* B, *ed in parti disuguali nel punto* D, *il quadrato della me-* FIG. 53.

metà di essa BC *è uguale al rettangolo delle parti disuguali* AD, DC, *col quadrato del segmento intermedio* BD.

SI descriva il quadrato di essa *BC*, il quale sia *BCEF*, e tirato il diametro *CF*, si conduca la *DH* parallela a *CE*, la quale seghi il diametro in *G*, e si tiri per il punto *G* la retta *IGLK*, concorrente co' lati *CE*, *BF* in *I*, *L*, e con la *AK*, parallela a detti lati in *K*. Sarà il rettangolo *GIEH* eguale a *BDGL* [a], ed aggiunto di comune il quadrato *DGIC*, sarà *DCEH* uguale al rettangolo *BCIL*, ovvero al rettangolo *ABLK*, uguale a questo per essere ambidue sopra basi uguali *CB*, *AB* [b]: ed aggiunto di comune il rettangolo *BDGL*, sarà il Gnomone *HGLBCE* uguale al rettangolo *ADGK*, il quale è contenuto dalla retta *AD*, e dalla *DG* uguale a *DC*; onde apposto ad entrambi il quadrato *LGHF*, che è quadrato di *BD*, sarà il Gnomone con tale quadrato, cioè il quadrato intiero *BCEF*, uguale al rettangolo delle parti disuguali *ADC*, col quadrato della parte intermedia *BD*; il che doveasi dimostrare.

a 43. 1.

b 36. 1.

PROPOSIZIONE VI.

FIG. 54.

Se alla retta AC, *divisa per mezzo in* B, *si aggiunga per diritto la retta* CD, *il rettangolo di tutta la composta* AD *nell' aggiunta* CD, *col quadrato della metà* BC, *uguaglia il quadrato della* BD, *composta della metà, e dell' aggiunta.*

PErchè descritto il quadrato *BDHF*, e tirato il diametro *DF*, da cui si seghi la *CE* parallela a *BF* in *I*, e per lo punto *I* tirata la *GK*,

con-

concorrente co' lati *DH*, *BF* in *I*, *L*, e con la *AK* parallela a *BF* in *K*; sarà il rettangolo *ABLK* uguale a *BCIL*, per essere sopra uguali basi [a]; ed è *BCIL* uguale all' altro complemento *GIEH* [b]; dunque *ABLK* uguaglia *GIEH*, ed aggiunto ad ambidue il rettangolo *BDGL*, sarà tutto il rettangolo *ADGK* (cioè contenuto dalla composta *AD*, e dall' aggiunta *DC* uguale a *DG*) uguale al Gnomone *BLIEHD*; dunque aggiunto ad ambidue il quadrato *LIEF* (che è il quadrato della metà *BC*) riesce il rettangolo *ADC*, col quadrato *BC*, uguale al detto Gnomone collo stesso quadrato, cioè a tutto il quadrato *BDHF*; il che ec.

a 36. 1.
b 43. 1.

PROPOSIZIONE VII.

Essendo la retta AB *comunque segata in* C, *li quadrati di tutta la* AB, *e di una sua parte* CB, *sono uguali al duplo del rettangolo di* AB *nella stessa* CB, *col quadrato della rimanente* AC.

FIG. 55.

SI descrivano essi due quadrati *ABDE*, e *CBKI*, e condotto nel maggiore il diametro *BE* segante la *IC* prolungata in *G*, si conduca per *G* la *HL*, segante i lati *AE*, *BD* in *H*, *L*, e continuata la *CG* convenga col lato *ED* in *F*. Essendo uguali i complementi *ACGH*, *LGFD* [b], ed i quadrati *CGLB*, *ICBK* fatti sopra lo stesso lato *CB*, sarà il rettangolo *ABLH* (contenuto da *AB* in *BC*) uguale alla somma del rettangolo *LGFD*, e del quadrato *ICBK*; e però il Gnomone *AHGFDB*, col quadrato *ICBK* uguaglia il duplo del rettangolo di *AB* in *BC*. Aggiunto dunque da ambe le parti il quadrato *HGFE*, che è il quadrato di

AC.

AC, sarà tutto il quadrato *ABDE*, col quadrato *CBKI*, uguale al duplo ret angolo *ABC*, col quadrato *AC*; il che dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE VIII.

FIG. 56 *Se alla retta* AB *comunque segata in* C *si aggiunga per diritto la retta* BD *uguale a* BC, *il quadrato della composta* AD *uguaglia quattro rettangoli di* AB *in* BC, *col quadrato della rimanente* AC.

DEscritto il quadrato *ADKG*, e condotte le *BI*, *CH* parallele al lato *AG*, si seghino col diametro *DG* in *N*, *P*, e per questi punti siano tirate le *ENM*, *FPL*, seganti le altre rette *CH*, *BI* in *O*, *Q*. E' manifesto essere il rettangolo *ABNE* uguale ad *NMKI*[a], a cui pure è uguale *ONIH* per essere le basi *ON*, *NM* tra di loro ugali (come lo sono *CB*, e *BD*); ed al rettangolo *EOPF*, che uguaglia *PQHI*[a], aggiunto il quadrato *BDMN* (uguale all' altro *ONPQ*) sara uguale la loro somma al rettangolo *ONIH*, ed a ciascheduno degli altri due *NMKI*, ed *ABNE*, contenuto dalla *AB*, e dalla *BC*, che uguaglia *BN*, ovvero *BD*. Dunque il Gnomone *AFPHKD* è quadruplo del rettangolo di *AB* in *BC*; ed aggiunto di quà, e di là il rettangolo *FPHG*, che è il quadrato di *AC*, sarà tutto il quadrato *ADKG* uguale alli quattro rettangoli di *AB* in *BC*, col quadrato della rimanente *AC*; il che dovea dimostrarsi.

a 43. 1.

PROPOSIZIONE IX.

FIG. 57. *La retta* AC *essendo segata in parti uguali nel punto* B, *ed in disuguali nel punto* D, *saranno li qua-*

quadrati delle parti disuguali AD, DC, *il doppio del quadrato della metà* AB, *e del quadrato della linea intermedia* BD.

SI alzi dal punto *B* ad angoli retti la *BE* uguale ad *AB*, e congiunte le rette *AE*, *CE* si tiri la *DF* perpendicolare anch'essa ad *AD*, cioè parallela a *BE*, e posta *FG* parallela a *BD*, si congiunga *AF*. Essendo i lati *AB*, *BE* eguali, intorno l'angolo retto *B*, saranno eguali li due angoli *BAE*, *BEA* [a], che uguagliano un altro retto [b], e però saranno semiretti. Similmente li angoli *BEC*, *BCF* per la stessa ragione sono semiretti; dunque è retto l'angolo *AEC* composto di due semiretti; e saranno ancora semiretti gli angoli *EFG*, *DFC*, che uguagliano ciascuno delli due *BCF*, *BEC* [c]; dunque *EG* uguaglia *GF*, cioè *BD*, e *DF* uguaglia *DC* Per tanto li due quadrati *AD*, *DC* sono uguali alli due *AD*, *DF*, cioè al quadrato *AF* [d], ovvero alli due quadrati *AE*, *EF* [d]; ed è il quadrato *AE* duplo del quadrato *AB*, essendo uguale ad ambidue li quadrati *AB*, *BE*, tra di loro uguali; ed il quadrato *EF* è parimente duplo del quadrato *BD*, uguagliando li due quadrati *EG*, *GF*, uguali a quello di *BD*. Dunque li quadrati delle parti disuguali *AD*, *DC* sono il doppio del quadrato della metà *AB*, e del quadrato della parte intermedia *BD*; il che ec.

a 5. 1.
b 32. 1.
c 29. 1.
d 47. 1.

PROPOSIZIONE X.

Se alla retta AC *divisa ugualmente in* B, *si aggiunga per diritto un altra retta* CD, *il quadrato della composta* AD, *e dell'aggiunta* CD *sono il du-*

FIG. 58.

duplo del quadrato della metà AB, *e della* BD *composta della metà, e dell' aggiunta.*

ALzata *BE* perpendicolare ad *AB*, ed uguale alla stessa, si congiungano *AE*, *EC*, e tirata la *DF* parallela ad *EB* concorra colla *EC* in *F*, e si tiri *FG* parallela a *BD*, che convenga colla *EB* in *G*; indi congiungasi *AF*. E' manifesto, essere l' angolo *AEC* retto, essendo semiretti gli angoli *AEB*, *BEC*, come ancora li altri *DCF*, *DFC*, *CFG*, come si è provato nell' antecedente proposizione; e però *DF* è uguale a *DC*, ed *EG* uguale ad *FG*, cioè alla *BD*; onde il quadrato *EF* è il duplo del quadrato *BD*, ed il quadrato *AE* è duplo del quadrato *AB*, a' quali essendo eguale il quadrato *AF*, per essere l' angolo *AEF* retto; e lo stesso essendo uguale a' quadrati *AD*, *DF* (per essere ancora retto l' angolo *ADF*) cioè a' quadrati *AD*, *DC*; è manifesto, che questi due quadrati *AD*, *DC* sono uguali al doppio del quadrato *AB*, ed al doppio del quadrato *BD*; il che ec.

PROPOSIZIONE XI. PROBL.

FIG. 59. *Segare una data retta linea* AB *in* C, *talmente che il rettangolo di essa* AB *nella parte minore* BC *riesca uguale al quadrato della rimanente parte maggiore* AC.

DEscritto il quadrato di tutta la *AB*, il quale sia *ABDE*, si divida per mezzo in *F* un lato *AE* contiguo ad essa *AB*; e congiunta la retta *BF*, si prolunghi *FA* verso *G*, in maniera, che sia *FG* uguale ad *FB*; Indi sopra l' eccesso *AG* si descriva il quadrato *AGIC*, il cui lato *IC* prolun-

lungato feghi i lati AB, ED in C, & H. Dico essere il punto C quel segamento della retta AB, che si ricercava. Perchè essendo AE divisa per mezzo in F, ed aggiuntavi AG, sarà il rettangolo EGA (cioè $EGIH$, per essere GI uguale a GA) insieme col quadrato AF, uguale al quadrato FG [a], cioè al quadrato FB, che uguaglia FG, o pure alli due quadrati AB, AF, che uguagliano esso quadrato FB [b]; Però tolto di comune il quadrato AF; rimane il rettangolo $EGIH$ uguale al quadrato $ABDE$, e tolto di comune $ACHE$, resta il quadrato $ACIG$ uguale al rettangolo $DBCH$, cioè il quadrato AC uguale al rettangolo ABC; il che era il quesito.

a 6. 2.

b 47. 1.

PROPOSIZIONE XII.

FIG. 60.

Ne' triangoli ottusiangoli, come ABC, *il quadrato del lato* AC *opposto all' angolo ottuso è maggiore de' quadrati degli altri due lati* AB, BC, *e li supera di due rettangoli contenuti da uno di essi lati* CB, *e dalla porzione* BD *intercetta fra l' angolo* B, *e la perpendicolare* AD, *tirata sopra il lato* CB *prolungato, dall' angolo* A *opposto ad esso.*

IMperocchè il quadrato AC uguaglia li due quadrati AD, CD [c]; ma il quadrato CD è uguale a' quadrati CD, BD, ed a' due rettangoli CBD [d]; dunque il quadrato AC è uguale a' quadrati AD, BD, CB, ed a' due rettangoli CBD; essendo adunque li due quadrati AD, BD uguali al quadrato AB [c]; ne segue, che il quadrato AC è uguale a' quadrati AB, CB, ed a' due rettangoli CBD; il che ec.

c 47. 1.

d 4. 2.

PRO-

PROPOSIZIONE XIII.

FIG. 61. *Il quadrato del lato* AC *opposto ad un angolo acuto* B *del triangolo* ABC *è minore de' quadrati de' lati* AB, CB, *da' quali è superato per due rettangoli* CBD *compresi da uno de' lati* CB, *e dall'intercetta* DB *fra l'angolo* B, *e la perpendicolare condotta sopra* CB *dall'opposto angolo* A.

IMperocchè il quadrato *CB* col quadrato *DB* è uguale a due rettangoli *CBD*, ed al quadrato *CD* [a]. Si aggiunga a questi, e a quelli il quadrato della perpendicolare *AD*, sarà la somma de' quadrati *CB*, *BD*, ed *AD* uguale alla somma de' due rettangoli *CBD*, del quadrato *CD*, e del quadrato *AD*; ma li due quadrati *BD*, ed *AD* uguagliano il quadrato *AB*; e li due quadrati *CD*, *AD* sono uguali al quadrato *AC* [b], dunque li quadrati *AB*, *CB* sono uguali al quadrato *AC* con due rettangoli *CBD*, e però il quadrato *AC* è minore de' due quadrati *AB*, *CB* della quantità di detti due rettangoli; il che ec.

a 7. 2.

b 47. 1.

PROPOSIZIONE XIV. PROBL.

FIG 62. *Ritrovare un quadrato uguale ad un dato rettilineo* A.

SI faccia in un angolo un parallelogrammo *BDEF* uguale al dato rettilineo *A* [c], e si prolunghi *BD* in *G*, sicchè sia *DG* uguale al lato *DE*, poscia divisa per mezzo la *BG* in *C*, dal centro *C* descrivasi col raggio *CB* il semicircolo *BHG*, a cui si stenda il lato *DE*, il quale concorra colla periferia in *H*. Dico essere il quadrato *DH* uguale

c 45. 1.

le al detto rettilineo *A*. Imperocchè congiunta *CH*, ſarà il quadrato *CH* uguale a' due quadrati *CD*, *DH* [a], ma il raggio *CH* uguaglia il raggio *CG*, dunque gli due quadrati *CD*, e *DH* uguagliano il quadrato *CG*. Ma per eſſere *BG* ſegata pel mezzo in *C*, e non pel mezzo in *D*, eſſo quadrato *CG* uguaglia il rettangolo *BDG*, col quadrato *CD* [b]; dunque il quadrato *CD* col quadrato *DH* è uguale al quadrato *CD* col rettangolo *BDG*; e però il quadrato *DH* uguaglia eſſo rettangolo *BDG*, o *BDEF*; ma queſto ſi era fatto uguale al rettilineo *A*, dunque al medeſimo rettilineo è uguale il quadrato *DH*, che dovea ritrovarſi.

[a] 47. 1.

[b] 5. 2.

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
DI EUCLIDE.
LIBRO III.

~~

DEFINIZIONI.

I. UNa linea retta diceſi TANGENTE del Cerchio, ſe incontrandoſi in qualche punto della ſua circonferenza, benchè ſi prolunghi, non la ſega.

II. Similmente diconſi TOCCARE le circonferenze de' Cerchj, quando in qualche punto convengono, ma non ſi ſegano.

III. Diconſi EGUALMENTE dal centro DISTANTI

quelle rette linee, ſopra di cui le perpendicolari condotte da eſſo centro ſi trovano uguali.

IV. SEGMENTO di cerchio chiamaſi quella porzione, che da un arco di eſſo, e dalla corda di una linea retta al medeſimo ſottoteſa, è contenuto.

V. ANGOLO DEL SEGMENTO ſi nomina quello, che nel termine dell' arco dalla ſua periferia, e dalla corda ſottopoſta comprendeſi.

VI. ANGOLO poi NEL SEGMENTO diceſi qualunque di quelli, che dalle rette condotte da ambi i termini della corda, a qualunque punto dell' arco, ſono contenuti.

VII. Lo ſteſſo angolo ſi dice INSISTERE ſopra l' arco circolare oppoſto, il quale, con quello del ſegmento, compiſce il Cerchio.

VIII. SETTORE ſi chiama lo ſpazio compreſo da due raggi del cerchio, e dall' arco da eſſi intercetto.

IX. SEGMENTI SIMILI diconſi quelli, che comprendono angoli uguali, contenuti dalle rette tirate da qualunque punto dell' arco a' termini della corda.

PROPOSIZIONE I. PROBL.

FIG. 63. *Trovare il centro* E *d' un dato cerchio* ABC.

SI tiri dentro di eſſo qualunque retta *AC*, e dividaſi per mezzo in *F* [a], indi ſi alzi ſopra di eſſa una perpendicolare *FB*, la quale ſeghi la circonferenza in *B*, e *D* [b]; e diviſa pure eſſa *BD* per mezzo in *E*, dico eſſere queſto punto *E* il centro ricercato. Imperocchè, ſe foſſe fuori della linea

a 10. 1.

b 11. 1.

nea *BD*, come in *G*, tirate le linee *GA*, *GC* sarebbero uguali, e congiunta *GF*, essendo comune a' triangoli *GFA*, *GFC*, in cui pure i lati *AF*, *FC* sono uguali, sarebbe pure l' angolo *AFG* uguale al conseguente *GFC* [a]; e però ambidue retti, dunque l' angolo *AFG* sarebbe uguale all' angolo *AFE*, che si era pure fatto retto dalla perpendicolare *FB* [b]; il che è assurdo [c]; dunque il centro non è fuori della retta *BD*, nè può essere altrove, che nel mezzo di essa; e però *E* è il centro ricercato.

a 8. 1.
b *Assiom.* 7.
c *Assiom.* 6.

COROLLARIO. Condotta dunque nel cerchio qualunque linea *CA*, e dal punto di mezzo *F* eretta la perpendicolare, in essa deve sempre essere il centro del cerchio.

PROPOSIZIONE II.

FIG. 64.

La retta AB, *che congiunge due punti* A, B *della periferia d' un cerchio, giace tutta dentro al medesimo cerchio.*

IMperocchè tra' punti *A*, e *B* preso qualunque punto *D* in essa linea, ed al centro *C* congiunte le rette *CA*, *CB*, *CD*, o saranno gli angoli *ADC*, *BDC* retti, o l' uno acuto, l' altro ottuso; sia per esempio *ADC* ottuso, o retto; gli altri angoli saranno in esso triangolo acuti [d], e però il lato *AC* sarà maggiore di *CD* [e]; ma segandosi la circonferenza da essa *CD* in *F*, la *CF* uguaglia il raggio *AC*; dunque essendo *DC* minore del raggio *CF*, il punto *D* è più accosto al centro, che non è la periferia del cerchio; e però qualunque punto *D* della retta *AB* si prova dentro al circolo; dunque giace tutta la linea *AB* dentro al medesimo; il che ec.

d 17. 1.
e 19. 1.

PROPOSIZIONE III.

Se nel cerchio ABCD *la retta* BD, *che passa* FIG. 65. *pel centro* E, *sega per mezzo la retta* AC, *che non passa pel centro, la segherà ad angolo retto: e viceversa, se la sega ad angolo retto in* F, *ivi la divide pel mezzo.*

PErchè ne' triangoli *AEF*, *CEF*, essendo il lato *EF* comune, se ancora il lato *AF* uguaglia *FC*, e la base *AE* è uguale all' altra *EC*, gli a 8. 1. angoli *AFE*, e *CFE* saranno uguali [a], e però retti, e se sono questi retti, essendo ancora gli an- b 5. 1. goli *EAF*, *ECF* uguali [b], ed il lato *EF* comune, c 26. 1. sarà ancora il lato *AF* uguale ad *FC* [c]; il che ec.

PROPOSIZIONE IV.

Se due linee AB, CD, *che non passano pel cen-* FIG. 66. *tro, si segano in* F, *non saranno ivi ambedue divise pel mezzo.*

DAl centro *E* si conduca la *EF*. Se fosse *AB* divisa pel mezzo in *F*, gli sarebbe *EF* per- d 3. 3. pendicolare [d]; e se pure *CD* si dividesse per mezzo nel medesimo punto *F*, sarebbe a questa ancora perpendicolare la stessa *EF*; dunque l' angolo retto *AFE* uguaglierebbe il retto *CFE*, onde il tutto sarebbe uguale alla parte; il che è impos- e *Assiom.* 6. sibile [e] Dunque non si segano l' una, e l' altra pel mezzo fuori del centro. Il che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE V.

Se due cerchj AB, CD *si seghino in* B, *non a-* FIG. 67. *veranno il medesimo centro* E *comune ad entrambi.*

Im-

IMperocchè congiunta al ſegamento la retta *EB*, e tirata qualunque altra *EAD*, che ſeghi ambedue le circonferenze, ove ſono diſtinte, in *A*, *D*, ſe foſſe il punto *E* centro d'ambi i cerchj, ſarebbe *EB* uguale tanto ad *EA*, che ad *ED*, onde queſte due ſarebbero uguali tra loro [a], eſſendo uguali ad una terza; il che è impoſſibile, perchè il tutto non può eſſere uguale ad una ſua parte [b]; dunque tali cerchj non hanno un centro comune *E*; il che era da dimoſtrarſi.

a *Aſſiom.* 1.

b *Aſſiom.* 6.

PROPOSIZIONE VI.

FIG. 68.

Parimente, ſe detti cerchj ſi toccaſſero in B, *non potrebbero avere un centro comune* E.

PErchè giunta al contatto *EB*, e tirata l'altra *EAD*, ne ſeguirebbe lo ſteſſo aſſurdo, come nell' antecedente. Dunque è veriſſima ancora queſta propoſta.

PROPOSIZIONE VII.

Tav. IV. FIG. 69.

Preſo dentro al cerchio ADB *il punto* G *fuori del centro* E, *e condotta pel centro la retta* GEA, *continuata dall' altra parte in* B, *e tirate altre rette* GF, GD, *ſarà primieramente la* GA *maſſima di tutte; ſecondo la* GF *più vicina alla maſſima, ſarà maggiore della* GD *più lontana da eſſa; terzo la* GB *reſidua del diametro, è la minima di tutte; quarto facendo l' angolo* GEH *uguale all' altro* GEF, *congiunta* GH *riuſcirà uguale a* GF, *onde due ſole linee ſi poſſono tirare tra di loro uguali dal punto* G *alla circonferenza, una di quà, ed una di là dalla maſſima.*

TIrati dal centro *E* i raggi *EF*, *ED*, *EH*, essendo *EF* uguale ad *EA*, aggiunta ad ambedue la *EG*, sarà *GA* uguale alli due lati *GE*, *EF*, i quali sono maggiori del terzo *GF* [a]; dunque *GA* è maggiore di *GF*, e similmente si mostrerebbe maggiore di qualunque altra *GD*, che però è la massima di tutte, come in primo luogo dovea dimostrarsi.

a 20. 1.

Secondo, essendo ne' triangoli *GEF*, *GED* il lato *GE* comune, ed il lato *EF* uguale ad *ED*, ma l' angolo *GEF* maggiore di *GED*, sarà la base *GF* maggiore dell' altra *GD* [b], e però la retta più prossima alla massima *GA*, è maggiore della più lontana.

b 24. 1.

Terzo, quindi la *GB* direttamente opposta alla massima *GA*, e però più remota da essa di qualunque altra, è la minima di tutte, essendo qualunque *GD* maggiore di essa, perchè *GD* con *GE* è maggiore di *ED*, e però maggiore di *EB*, e però tolta di comune *GE*, rimane *GD* maggiore di *GB* [c].

c *Assiom.* 3.

Quarto, essendo fatti gli angoli al centro uguali *GEH*, *GEF*, contenuti da lati uguali, essendo *GE* comune, ed *EH* uguale ad *EF*, le basi *GH*, *GF* saranno pure uguali [d]; ma se si tirasse da esso punto *G* qualunque altra linea alla circonferenza, sarebbe più vicina, o più lontana dalla massima, che non sono queste due; dunque due sole linee uguali si possono tirare da un punto, che non sia centro, alla circonferenza, una di quà, e una di là dalla massima; il che ec.

d 4. 1.

PRO-

PROPOSIZIONE VIII.

Se il punto G *è preso fuori del cerchio, primieramente condotta pel centro la retta* GEA *fino al concavo della circonferenza, sarà questa la massima di tutte. Secondo la* GF *più vicina alla massima, sarà maggiore della* GD *più lontana. Terzo la* GB *terminata al convesso della periferia, che continuata passa pel centro, è la minima di tutte. Quarto di tutte le rette terminate al convesso, sempre la* Gf *più vicina alla minima, è minore della* Gd *più lontana. Quinto due sole linee uguali una di quà, e una di là dalla massima, o dalla minima potranno tirarsi da esso punto* G *al concavo, o al convesso della circonferenza, facendo al centro gli angoli uguali* GEH, GED, *ovvero* GEh, GEf. FIG. 70.

IL primo, ed il secondo si prova come nell' antecedente; il terzo si dimostra ancora, perchè essendo *E d*, con *d G* maggiore di *EG* [a], tolte *E d*, ed *E B* raggi uguali, rimane *G d* maggiore di *G B*, e così qualunque altra *G f* sarà maggiore di *G B*, e però questa è la minima di tutte.

a 20. 1.

Il quarto si prova, perchè le due *G d*, *d E* sono maggiori delle due *G f*, *f E* [b]: ma *d E*, *f E* sono uguali, dunque *G d* è maggiore di *G f*; e però le più vicine alla minima *G B*, sopra il convesso del cerchio, sono minori delle più lontane.

b 21. 1.

Il Quinto si prova, come il quarto della proposizione precedente.

PROPOSIZIONE IX.

Se da un punto E *dentro al circolo si possono tira-* FIG. 71.

re alla circonferenza più di due linee uguali EA, ED, EF, *sarà quello il centro di esso cerchio.*

IMperocchè da un punto, che non fosse centro non si potrebbero tirare, se non due linee uguali, come si è dimostrato di sopra [a].

a 7. III.

PROPOSIZIONE X.

FIG. 72. *Due cerchj non possono segarsi, se non in due soli punti.*

PErchè se si segassero in tre punti *A*, *B*, *C*, condotte dal centro *E* di uno di essi le rette *EA*, *EB*, *EC* a' segamenti, essendo uguali, dovrebbe essere il punto *E* centro ancora dell' altro cerchio [b], il che è impossibile [c].

b 9. III.
c 5. III.

PROPOSIZIONE XI.

FIG. 73. *Se due cerchj si toccano al di dentro in* B, *la retta, che congiunge i loro centri* E, C, *prolungata passerà pel contatto* B.

ALtrimenti, se fosse del maggior cerchio il centro *e*, che congiunto col centro *C* del minore segasse le circonferenze, ove sono disgiunte, in *D*, *A*; tirate al contatto le rette *CB*, *e B*, essendo *CD* uguale a *CB*, sarà *D e* uguale alle due *B C*, *C e*, e però maggiore di *B e* [d], cioè dell' altro raggio *e A*; e così la parte *e D* maggiore del tutto *e A*; il che è impossibile [e]. Dunque il vero centro del cerchio maggiore era *E*, che connesso con *C* centro del minore, manda la linea *EC* al contatto *B*; il che era da dimostrarsi.

d 20. I.
e *Assiom.* 3.

PRO-

PROPOSIZIONE XII.

Ancora toccandosi due cerchj per di fuori in B, *la retta, che congiunge i loro centri* E, C, *passerà pel contatto* B. FIG. 74.

IMperocchè, se non fosse *E* il centro d'uno di essi cerchj, ma un altro punto *e*, sicchè congiunta la *e C* segasse le periferie in *A*, *D*, tirata la *e B*, sarebbe *e B* con *B C* uguale agl' altri due raggi *e A*, e *C D*, e però que' due lati *e B*, *B C* riuscirebbero minori del terzo *C e*; il che è impossibile [a], dunque il centro deve essere in *E*, nella retta *EC*, che passa pel contatto *B*; il che ec.

a 20. 1.

PROPOSIZIONE XIII.

Due cerchj, che si tocchino dentro, o fuori, averanno il loro contatto in un solo punto B. FIG. 75.

SI congiungano i loro centri *E*, *C* colla retta *CE*, che passerà pel contatto *B* [b]; ma se si toccassero in altro punto *D*, si congiunga ancora la *CD*. Perchè dunque la *CB* passa pel centro *E* dell' altro cerchio maggiore, sarà *CB* la minima di quelle, che dal punto *C* si conducono alla periferia del detto cerchio, il cui centro *E* [c], dunque non sarebbe *CD* uguale a *CB*, e però non sarebbero amendue raggi del cerchio, il cui centro *C*; e però non si toccano essi cerchj in altro punto, che in *B*.

b 12. 3.

c 7. III.

PROPOSIZIONE XIV.

Nel cerchio le rette AC, BD *se sono uguali saranno ugualmente distanti dal centro* E; *e se sono da esso ugualmente distanti, sono tra di loro uguali.* FIG. 76.

Ti-

Tirate le perpendicolari *EF*, *EG* sopra di esse dal centro *E*, saranno divise pel mezzo le rette *AC*, *BD* [a], onde sarà *AF* uguale a *BG*, se tutta la *AC* era uguale a tutta la *BD*; e congiunti i raggi *EA*, *EB*, li cui quadrati sono uguali, saranno altresì li quadrati *AF*, ed *FE* uguali a' quadrati *BG*, *EG*, perchè uguagliano i quadrati de' raggi opposti agli angoli retti *F*, *G* [b], dunque essendo uguali li quadrati *AF*, *BG* devono essere uguali i rimanenti quadrati *EF*, *EG* [c], e però ancora esse perpendicolari sono uguali, e però le rette uguali *AC*. *BD* sono ugualmente distanti dal centro *E* [d]. Viceversa le rette, che saranno ugualmente distanti dal centro, dovranno essere uguali, perchè i due quadrati *AF*, *FE* uguagliando gli altri due *BG*, *GE*, essendo tanto quelli, che quelli uguali al quadrato del raggio, però siccome il quadrato *EF* uguaglierà il quadrato *EG*. ancora i quadrati rimanenti *AF*, *BG* saranno uguali, ed essendo *AF*; *BG* la metà delle rette *AC*, *BD* [a], ancora le intiere *AC*, *BD* riescono uguali; il che ec.

a 3 III.

b 47. I.

c Assiom. 2.

d Defin. 3.

PROPOSIZIONE XV.

Delle rette inscritte in un circolo la massima è il diametro, e dell'altre la più vicina IK *al centro* E, *è maggiore della più lontana* AC.

FIG. 77.

Tirate dal centro sopra le rette *AC*, *IK* le perpendicolari *EF*, *EH*, si prolunghi questa in *G*, sicchè sia *EG* uguale ad *EF*, e si tiri la *BGD* parallela ad *IK*, cui parimente sarà perpendicolare la *EG*, onde *DB* riuscirà uguale ad *AC* [e]; ma congiunti i raggi *EI*, *EK*, *ED*, *EB*, essendo gli

e 14. III.

due

due lati *IE*, *KE* uguali agli due *BE*, *DE*, ma l' angolo *IEK* maggiore di *BED*, dunque la base *IK* è maggiore dell' altra *BD* [a], e però è maggiore la più vicina al centro della più lontana *AC*, che uguaglia *BD*; ed il diametro è vicino più di tutti al centro, dunque è maggiore di qualunque altra retta non condotta pel centro, e però è la massima di tutte, uguagliando sempre gli due raggi come *EI*, *EK*, i quali sono maggiori della base *IK* [b]; onde è manifesto ciò, che dovea provarsi.

a 24. 1.

b 20. 1.

PROPOSIZIONE XVI.

FIG. 78.

La retta EAD *tirata dal termine* A *del diametro* AH, *perpendicolare ad esso, sarà tangente del cerchio* AB, *rimanendo tutta negli altri punti esteriore alla circonferenza: nè potrà inserirsi veruna linea retta* LA *tra la stessa tangente* AE, *e la circonferenza; e però l' angolo del semicircolo* CAB, *o* CAF *sarà maggiore di qualsivoglia angolo acuto* LAH; *e l' angolo del contatto* FAE *è minore di qualsivoglia piccolo angolo rettilineo* LAE.

Tirata dal centro *C* a qualunque altro punto *D* della retta *EAD*, che nel punto *A* conviene colla circonferenza, la retta *CD*, questa opposta all' angolo retto *CAD* sarà maggiore del raggio *CA* opposto all' angolo acuto *CDA* [c], e però è maggiore del raggio *CB*, dunque il punto *D* è di là della circonferenza; e così qualunque altro punto di essa linea *EAD* rimane fuori del cerchio, che però solamente in esso punto *A* resta toccato dalla retta *EAD*. Che poi non possa tra la circonferenza, e la tangente inserirsi al contatto *A* ve-

c 19. 1.

veruna retta *LA*, è manifesto, perchè condotta dal centro *C* la perpendicolare *CG* sopra essa *LA*, sarà *CG* minore di *CA*, come opposta quella ad angolo minore del retto *CGA*, cui si oppone questa [a], dunque il punto *G* della retta *LA* essendo più vicino del raggio al centro *C*, sarà dentro esso cerchio; e però la retta *LA* sega il circolo, non resta interposta fra la circonferenza, e la tangente; onde l'angolo del semicircolo eccede qualunque angolo acuto *LAC*, e l'angolo del contatto è minore di qualsivoglia piccolissimo angolo *EAL*; Il che era da dimostrarsi.

a 19. I.

PROPOSIZIONE XVII. PROBL.

FIG. 79.

Da un dato punto E *condurre una tangente* EA *al dato cerchio* FBA.

Congiunta al centro *C* del dato cerchio la retta *EC*, segante la periferia in *B*, si descriva col raggio *CE* un altro cerchio concentrico *ED*, e posta *BD* perpendicolare alla *EC*, la quale concorra colla periferia di questo secondo cerchio in *D*, si congiunga *CD*, segante la prima data circonferenza in *A*; congiunta *EA* sarà tangente; imperocchè gli triangoli *ECA*, *DCB*, avendo intorno il comune angolo *C* i lati *CE*, *CA* uguali a *CD*, *CB*, non solo le loro basi *EA* *BD* saranno uguali, ma ancora gli angoli corrispondenti [b], e però l'angolo *EAC* sarà retto, come l'angolo *DBC*, dunque essendo *AE* perpendicolare al termine del diametro *ACE* sarà essa *AE* tangente [c]; il che dovea eseguirsi.

b 4. I.

c 16. III.

PRO-

PROPOSIZIONE XVIII.

Se la retta AE *tocca il cerchio* ABF, *condotta dal centro* C *al contatto* A *la retta* CA, *farà con essa tangente angolo retto.* FIG. 80.

SE nò si conduca la *CD* perpendicolare ad essa tangente; sarà dunque *AC* maggiore di *CD* [a]; ma *CB* uguaglia *CA*, dunque sarebbe la parte *CB* del tutto *CD* maggiore; il che è assurdo [b].

a 19. I.
b *Assiom.* 6.

PROPOSIZIONE XIX.

Toccandosi il cerchio in A *dalla retta* AE, *se dal contatto* A *si alza la perpendicolare* AH *ad essa tangente, passerà per lo centro* C *del Cerchio.*

ALtrimenti se fosse il centro in *G* fuori della retta *AH*, congiunta *GA* farebbe ancor essa angolo retto con *AE* [c], dunque gli angoli *GAE*, *CAE* sarebbero uguali [d], ed il tutto riuscirebbe uguale alla parte; il che è impossibile [b].

c 18. III.
d *Assiom.* 7.

PROPOSIZIONE XX.

Se da i termini dell' arco AB *si conducono due raggi al centro* C, *e due linee a qualche punto* D, E, F, *della circonferenza opposta a detto arco, sarà l' angolo* ACB *duplo di qualsivoglia di detti angoli* ADB, AEB, AFB. FIG. 81.

NEl triangolo *CEB* fatto dal raggio *AC* prolungato in *E* sono gli angoli *AEB*, e *CBE* uguali [e], ma l' angolo esterno *ACB* è uguale ad ambidue gl' interni opposti *AEB*, *CBE* [f], dunque

e 5. I.
f 32. I.

ACB

ACB è duplo di *AEB*. Quanto all' angolo *ADB* fatto sotto l' altro *AEB*, congiunta la retta *DC*, e prolungata in *G*, sarà l' angolo *GCB* uguale a' due interni tra di loro uguali *CDB*, *CBD* [a], e però è duplo *GCB* di *CDB*; similmente l' angolo *GCA* sarà duplo di *CDA*, uguagliando ancor esso gli due interni tra di loro uguali *CDA*, *CAD* [a]; dunque il rimanente *ACB* è duplo del rimanente *ADB*. Se poi l' angolo *AFB* è al di sopra, di maniera, che la retta *FC* prolungata in *H* seghi l' angolo centrale *ACB*, tanto sarà l' esterno *ACH* duplo dell' interno *AFC*, quanto il rimanente *HCB* duplo di *CFB*, dunque tutto l' angolo *ACB* sarà pure il doppio dell' angolo intero *AFB*; il che ec.

a 32. I.

PROPOSIZIONE XXI.

Li angoli ADB, AEB, AFB *insistenti al medesimo arco, e disposti nello stesso segmento, sono tra di loro uguali.*

Imperocchè ciascuno di essi è la metà dell' angolo fatto al centro *ACB* [b], dunque riescono tra di loro uguali.

b 20. 3.

PROPOSIZIONE XXII.

FIG. 81.

Ogni quadrilatero ABCD *inscritto in un circolo ha gli angoli opposti uguali a due retti.*

Si conducano le diagonali *AC*, *BD*. Sarà l' angolo *ABD* uguale all' angolo *ACD* [c], e l' angolo *DBC* uguale all' angolo *DAC*; dunque tutto l' angolo *ABC* uguaglia li due *DCA*, *DAC*; ed aggiunto di quà, e di là l' angolo *ADC*; sono li due angoli opposti *ABC*, *ADC* del detto quadrilatero,

c 21. III.

ro, eguali a tutti tre gli angoli del triangolo *ADC*, i quali sono uguali a due retti [a]. Il che era da dimostrarsi.

a 32. I.

PROPOSIZIONE XXIII.

Sopra la stessa retta AC *non possono essere descritti verso la medesima parte due segmenti simili, e disuguali* ADC, ABC.

FIG. 83.

MErcecchè condotta da un termine *C* la retta *CBD*, segante le due circonferenze in *B*, *D*, e congiunte all'altro termine *A* le rette *BA*, *DA*, se fossero i segmenti simili, sarebbero gli angoli *ADC*, *ABC* uguali [b], il che è impossibile, essendo l'uno esterno, l'altro interno opposto del triangolo *ADB* [c]; dunque non possono tali segmenti essere simili.

b Defin. 9.
c 16. I.

PROPOSIZIONE XXIV.

Simili porzioni di cerchj ADC, BEF, *descritte sopra linee uguali tra di loro* AC, BF, *sono porzioni uguali.*

FIG. 84.

ALtrimenti soprapponendo l'una all'altra, adattandosi la base *AC* all'altra uguale *BF*, riuscirebbero sopra la stessa linea descritti due segmenti simili, e disuguali, il che è impossibile [d]; dunque è necessario, che dette porzioni siano uguali.

d 23. III.

PROPOSIZIONE XXV. PROBL.

Data una porzione di cerchio EAF, *trovarne il centro* C, *per poterne compire tutto il circolo.*

FIG. 85.

Di-

DIvisa la corda *EF* pel mezzo in *D*, gli si conduca la perpendicolare *DH*; e tirata un altra qualsivoglia retta *EA* dentro la stessa porzione, dividasi per mezzo in *B*, e gli si conduca la perpendicolare *BC*, concorrente in *C* con l'altra *D H*. Dico essere *C* il centro ricercato, di maniera che congiunta *CE*, si potrà con questo raggio compirne il cerchio *EAH*, dovendo esserne il centro di questo circolo in qualunque di dette perpendicolari seganti per mezzo esse corde *EF*, *EA*[a], e però nel loro concorso *C*; il che ec.

a *Coroll. Prop.* I. III.

PROPOSIZIONE XXVI.

FIG. 86. *Ne' cerchj uguali* ABD, EFH, *gli angoli uguali fatti al centro* ACB, EGF, *o fatti alla circonferenza* ADB, EHF, *insistono ad archi uguali* AB, EF.

SI conducano le corde *AB*, *EF*; queste saranno uguali, essendo basi di due triangoli *ACB*, *EGF*, che intorno gli angoli uguali *C*, *G*, hanno i lati uguali *CA*, *GE*, e *CB*, *GF*[b], dunque essendo le rette *AB*, *EF* uguali, e li segmenti *ADB*, *EHF* simili, per l'ugualità degli angoli in essi contenuti[c], onde sono porzioni di cerchio eguali[d], però ancora gli rimanenti archi *AB*, *EF* sono uguali; Il che ec.

b 4. I.
c *Defin.* 9. *b.*
d 24. III.

PROPOSIZIONE XXVII.

Ne' cerchj uguali, gli angoli fatti sopra archi uguali AB, EF, *al centro, o alla circonferenza, saranno uguali.*

Im-

IMperocchè se non fosse l'angolo *ACB* uguale ad *EGF*, suppongasi uguale ad *EGI*; dunque sarebbe l'arco *AB* uguale ad *EI* [a], e non ad *EF* contro l'ipotesi; pertanto sono uguali gli angoli *ACB*, *EGF* al centro, e così ancora gli altri *ADB*, *EHF* fatti alla circonferenza, di cui sono dupli quelli altri fatti al centro. Il che ec.

[a] 26. III.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Le rette uguali AB, EF, *in cerchj uguali, ne segano archi uguali, il maggiore* ADB *al maggiore* EHF, *ed il minore* AB *al minore* EF.

FAtti al centro gli angoli *ACB*, *EGF*, saranno uguali, essendo i lati, e le basi uguali in tali triangoli [b], dunque l'arco *AB* sarà all'altro *EF* uguale [a], e però ancora il rimanente *ADB* al residuo *EHF*; il che ec.

[b] 8. I.

PROPOSIZIONE XXIX.

Ne' cerchj uguali sono gli archi uguali segati da corde uguali.

ESsendo gli archi *AB*, *EF* uguali, ancora gli angoli al centro *ACB*, *EGF* saranno uguali [c], dunque per essere ancora uguali i lati di detti triangoli, le basi pure *AB*, *EF*, sono uguali; il che ec.

[c] 27. III.

PROPOSIZIONE XXX. PROBL.

Dato un arco circolare AEB, *dividerlo pel mezzo.* FIG. 87.

SI divida la corda *AB* pel mezzo in *D*, e vi si alzi la perpendicolare *DE*; dico che questa sc-

 gherà

gherà l' arco pel mezzo in *E*; perchè giunte le rette *AE*, *BE* saranno le basi uguali de' triangoli *ADE*, *BDE*, in cui il lato *DE* è comune, ed i lati *AD*, *BD* sono uguali, intorno ad angoli retti [a], ma le rette uguali in cerchj uguali, e però ancora nel medesimo cerchio, corrispondono ad archi uguali [b], dunque sono uguali gli archi *AE*, *BE*, ne' quali è diviso l' arco dato *AEB* dalla retta *DE*. Il che ec.

a 4. I.
b 28. III.

PROPOSIZIONE XXXI.

FIG. 88.

L' angolo ADB, *fatto nel semicircolo* BEA, *è retto*; *l' angolo* BAD, *fatto nel maggiore segmento* BFAD, *è acuto*, *e l' angolo BED*, *fatto nel segmento minore*, *sarà ottuso*.

COngiunta al centro la retta *DC*, e prolungata all' altra parte del circolo in *F*, essendo tanto l' angolo *ACF*, duplo di *ADF*, che l' angolo *FCB* duplo di *FDB* [c], saranno gli angoli *ACF*, *FCB* dupli dell' angolo *ADB*; ma quelli due sono uguali a due retti [d], dunque quest' angolo fatto nel semicircolo è retto; Però nel triangolo *ADB* l' angolo *A*, che è descritto nel segmento maggiore *BFAD*, è acuto, essendo l' altro *ADB*, retto [e]; e perchè nel quadrilatero *BEDA* i due angoli opposti *BAD*, *BED*, sono uguali a due retti [f], essendo *BAD* acuto, l' altro *BED* nel segmento minore, sarà ottuso. Il che ec.

c 20. III.
d 13. I.
e 17. I.
f 22. III.

PROPOSIZIONE XXXII.

FIG. 89.

Se nello stesso punto B *della circonferenza*, *la retta* GH *tocca il cerchio*, *e la* BD *lo sega*, *l' angolo*

lo della tangente, e della segante uguaglia quello, che si descriverebbe nell' alterno segmento, cioè DBH *è uguale all' angolo* BAD, *e* DBG *uguale a* BED.

SI conduca pel centro *C* dal contatto la linea *BCA*, e congiungasi *AD*; sarà l' angolo *CBH* retto [a], ed essendo ancora retto nel semicircolo l' angolo *ADB* [b], gli altri due *ABD*, *BAD* saranno uguali pure ad un retto [c], e però uguali a' due *ABD*, *DBH*; dunque tolto di comune *ABD*, rimane l' angolo *BAD* uguale a *DBH*; e perchè l' angolo *BED* con l' opposto *BAD* del quadrilatero *ADEB* uguaglia due retti [d], come ancora *DBH* con *DBG* compisce due retti [e], sarà l' angolo *BED* uguale a *DBG*. Il che ec.

a 18. III.
b 31. III.
c 32. I.
d 22. III.
e 13. I.

PROPOSIZIONE XXXIII. PROBL.

Sopra una data retta BD *descrivere una porzione di circolo, capace di un angolo uguale al dato angolo* F.

FIG. 90.

SI faccia l' angolo *DBH* uguale ad *F* [f], e divisa *BD* pel mezzo in *E*, si alzi *EC* perpendicolare ad essa, e dal punto *B* si tiri pure *BA* perpendicolare a *BH*; e convenendo queste due perpendicolari nel punto *C*, col raggio *CB* descrivasi un cerchio, che passerà ancora per *D*, essendo congiunta la *CD* uguale a *CB*, per essere basi de' triangoli rettangoli *CED*, *CEB*, ne' quali il lato *EC* è comune, ed i lati *ED*, *EB* uguali; e sarà esso circolo toccato dalla *BH* [g], però l' angolo *DAB* fatto nel segmento, che riesce sopra la data retta *BD*, sarà uguale all' angolo *DBH* [h], cioè al dato angolo *F*, per la costruzione. Il che ec.

f 23. I.
g 16. III.
h 32. III.

PROPOSIZIONE XXXIV. PROBL.

Da un dato cerchio tagliare una porzione capace dell' angolo uguale al dato F.

SI tiri la retta *BH*, che tocchi in *B* il dato cerchio, e si faccia l' angolo *HBD* uguale al dato *F*, è manifesto, che la porzione *BAD* sarà capace dell' angolo dato [a]. Il che ec.

a 33. III.

PROPOSIZIONE XXXV.

FIG. 91.

Se dentro al cerchio AGE *due rette* AB, EG *si segano in* F, *il rettangolo delle parti dell' una uguaglia quello delle parti dell' altra, cioè* AFB *è uguale ad* EFG.

SE si segassero nel centro, sarebbe ciò manifesto, essendo le parti di tali linee tanti raggi uguali del medesimo cerchio; ma essendo il loro concorso *F* diverso dal centro *C*, si tirino da esso centro *C* le perpendicolari *CD*, *CH* sopra dette lince, che da queste saranno segate pel mezzo [b], e si congiungano *CF*, *CE*, *CB*. Il rettangolo *AFB* col quadrato *DF* sarà uguale al quadrato *DB* [c], ed aggiunto il quadrato *CD* sarà il rettangolo *AFB* con li due quadrati *DF*, *CD*, cioè col quadrato *CF* [d], uguale a' due quadrati *DB*, e *CD*, cioè al quadrato del raggio *CB* [d], o dell' altro raggio *CE*; e questo pure essendo uguale a' quadrati *EH*, *CH* [c], cioè al rettangolo *EFG* col quadrato *FH* [b], e col quadrato *CH*, che è quanto dire al rettangolo *EFG* col quadrato *CF*; sarà dunque il rettangolo *AFB* col quadrato *CF*, uguale al rettangolo *EFG* col medesimo quadrato *CF*; onde tol-

b 3. III.
c 5. II.
d 47. I.

tolto di quà, e di là questo quadrato *CF*, rimane il rettangolo *AFB* uguale all'altro *EFG*. Il che ec.

PROPOSIZIONE XXXVI.

Da un punto F *fuori del cerchio tirata la tangente* FH, *ed una segante* FBA, *sarà il quadrato della tangente* FH *uguale al rettangolo* AFB *di tutta la segante, e della sua parte esteriore.* FIG. 92.

Condotta dal centro *C* la perpendicolare *CD* sopra la segante, che dividerà pel mezzo la parte interna *AB* [a], e congiunti li raggi *CB*, *CH*; essendo il quadrato *FD* uguale al rettangolo *AFB* col quadrato *BD* [b], aggiuntovi il quadrato *CD*, saranno li due quadrati *FD*, *CD*, cioè il quadrato *CF*, o li due quadrati *FH*, *CH* [c] (essendo l'angolo *CHF* retto [d]) uguali al rettangolo *AFB*, co' quadrati *BD*, e *CD*, cioè col quadrato del raggio *CB*; essendo adunque il quadrato della tangente *FH*, col quadrato del raggio *CH* uguale al rettangolo *AFB*, col quadrato del raggio *CB*, tolti gli uguali quadrati di detti raggi, rimane il quadrato *FH* della tangente uguale al rettangolo *AFB* di tutta la segante *FA* nella parte esterna *FB*; il che ec.

a 3. III.
b 6. II.
c 47. I.
d 18. III.

COROLLARIO I. Quindi se da un medesimo punto *F* si tireranno due tangenti *FH*, *FI* al medesimo circolo, queste saranno uguali, essendo ciascheduno di tali quadrati uguale al medesimo rettangolo *AFB* della segante condotta dallo stesso punto *F*.

COROLLARIO II. E se più seganti *FBA*, *FGE* si conducano da un punto *F* allo stesso cerchio, saranno i loro rettangoli *AFB*, *EFG* tra di loro uguali

uguali, essendo ciascheduno di essi uguale al quadrato della tangente *FH*.

PROPOSIZIONE XXXVII.

Se il rettangolo di una segante AFB *sarà uguale al quadrato della retta* FI, *che condotta dallo stesso punto* F, *si accosti alla periferia del cerchio, sarà questa* FI *tangente di esso.*

IMperocchè tirata la tangente *FH*, il cui quadrato uguaglia pure il rettangolo *AFB* [a], e però ancora è uguale al quadrato *FI*, e conseguentemente saranno le rette *FH*, *FI* uguali; e condotti li raggi *CH*, *CI* pure sono uguali; e congiunta al centro la retta *FC*, è questa lato comune a' due triangoli *FHC*, *FIC*; dunque l' angolo *FIC* uguaglia l' angolo *FHC* [b], il quale è retto [c]; pertanto essendo pure l' angolo *FIC* retto, questa *FI* sarà tangente [d]. Il che dovea dimostrarsi.

a 36. III.
b 8. I.
c 18. III.
d 16. III.

ELE-

ELEMENTI DELLA GEOMETRIA DI EUCLIDE

LIBRO IV.

~~

DEFINIZIONI.

I. Icesi INSCRITTA nel circolo una figura rettilinea, quando ciascun' angolo di essa tocca la circonferenza.

II. Ed allora il cerchio dicesi CIRCOSCRITTO ad essa figura rettilinea.

III. CIRCOSCRITTA poi al cerchio dicesi la figura rettilinea, se ciascun' lato di essa tocca la di lui circonferenza.

IV. Ed in tal caso dicesi il cerchio INSCRITTO a detta rettilinea figura.

PROPOSIZIONE I. PROBL.

Tav. V. FIG. 93.

In un dato cerchio, il cui diametro AB, *inscrivere una linea* AD *uguale ad una data* F, *non maggiore di esso diametro.*

COl centro *A*, e l' intervallo *AE* uguale ad *F* descrivasi un altro cerchio, che seghi in *D* quello già dato: è chiaro, che congiunta *AD* sarà uguale al raggio *AE*, e però alla data *F*. Il che dovea farsi.

PROPOSIZIONE II. PROBL.

FIG. 94. *Nel dato cerchio inscrivere un triangolo* ABD *equiangolo ad un altro dato* IGH.

SI tiri al cerchio, in qualche punto *A* la tangente *EAF*, e si faccia l' angolo *FAD* uguale all' angolo *IGH*, e l' angolo *EAB* uguale all' altro *IHG*, e congiunganſi li punti *D*, *B*, in cui queste rette ſegano il cerchio, con la retta *DB*. Dico che il triangolo *ABD* ſarà il ricercato; imperocchè l' angolo *ABD* uguaglia l' angolo *DAF* [a], e però è uguale all' angolo *IGH*; onde ancora l' angolo *ADB* uguaglia l' angolo *EAB*, e però è uguale all' angolo *GHI*, dunque ancora il terzo *BAD* uguaglia il terzo *GIH*; adunque tutto il triangolo *ABD*, inſcritto nel circolo, è equiangolo al dato triangolo *IGH*. Il che ec.

a 32. III.

PROPOSIZIONE III. PROBL.

FIG. 95. *Intorno ad un dato cerchio* ABD *circoſcrivere un triangolo* EFG *equiangolo ad un altro dato* IHK.

PRolungato uno de' lati *HK* dall' una, e dall' altra parte in *M*, *L*, ſi faccia al centro *C* del dato cerchio l' angolo *ACD* uguale all' angolo *IKL*, ed appreſſo ſi faccia l' angolo *DCB* uguale all' altro eſterno *IHM*; indi ſi tirino a' punti *A*, *D*, *B* le tangenti *AG*, *DE*, *BF*, le quali concorreranno, e formeranno un triangolo *EFG*, circonſcritto al cerchio, ed equiangolo a quello dato; imperocchè congiunta *BD* per eſempio, rieſcono gli angoli *BDE*, *DBE* minori de' due retti, fatti dalle tangenti col raggio *CDE*, *CBE*, e però concorrono inſieme [b];

b Aſſiom. 8.

per-

perchè poi tanto gli angoli del triangolo *BCD*, che quelli dell' altro *BED* sono uguali a due retti [a], gli angoli del quadrilatero *CBED* uguagliano quattro retti; ed essendo li due *CDE*, *CBE* retti, saranno gli altri due *BCD*, *BED* uguali a due retti, e però uguali a' due angoli *IHM*, *IHK*; ma l'angolo *BCD* fu fatto uguale ad *IHM*, dunque l'altro *BED* è uguale ad *IHK*. Similmente essendo gli angoli *ACD*, ed *AGD* uguali a due retti, e però uguagliando gli altri due *IKL*, *IKH*, dunque essendo fatto *ACD* uguale ad *IKL*, è l'altro *AGD* uguale ad *IKH*; e però ancora il terzo *AFB* uguaglia l' altro *HIK*; dunque il triangolo *EFG* circoscritto al dato cerchio, si è fatto equiangolo al dato triangolo *IHK*. Il che ec.

a 32. 1.

PROPOSIZIONE IV. PROBL.

FIG. 96.

In un dato triangolo EFG *inscrivere un cerchio* ABD.

SI dividano pel mezzo gli angoli *FEG*, *FGE* colle rette *EC*, *GC* concorrenti in *C*, e da esso punto *C* si tirino le perpendicolari *CA*, *CB*, *CD* sopra a' tre lati di esso triangolo; saranno queste uguali, perchè ne' triangoli *CED*, *CEB*, essendo gli angoli *DEC*, *BEC* uguali, ed ancora li retti *CDE*, *CBE* uguali, ed il lato *EC* comune, ancora gli altri lati *CB*, *CD* sono uguali [b]; e così ancora ne' triangoli *CDG*, *CAG* si proverà *CD* uguale a *CA*, dunque tutte tre le dette perpendicolari sono uguali; onde col centro *C*, e con l' intervallo *CA* descritto un cerchio passerà per li punti *A*, *B*, *D*, e sarà toccato da' lati di questo triangolo *FEG*, essendo ad angoli retti a ciasche-

b 26. 1.

dunq

a 16. III. duno de' raggi *CA*, *CB*, *CD* [a], e però sarà inscritto detto circolo nel dato triangolo. Il che ec.

PROPOSIZIONE V. PROBL.

FIG. 97. *A un dato triangolo* ABD *circoscrivere un circolo*.

SI taglino pel mezzo due lati *AB*, *BD* in *E*, *F*, e si alzino ad essi le perpendicolari *EC*, *FC*, concorrenti in *C*, e congiunto il punto *C* con tutti tre gli angoli *A*, *B*, *D*, il cerchio descritto per qualunque de' raggi *CA*, *CB*, *CD*, i quali saranno uguali, sarà circoscritto al dato triangolo; imperocchè, essendo *AE* uguale ad *EB*, ed *EC* comune a' triangoli *AEC*, *BEC*, e gli angoli di quà, e di là dalla retta *CE* uguali, perchè retti, la base *CA* sarà uguale a *CB*; e similmente ne' triangoli *BFC*, *DFC*, per essere intorno ad angoli retti, i lati *BF*, *FC*, *DF*, *FC* uguali, *CB* uguale
b 4. I. sarà a *CD* [b], dunque il cerchio passa per tutti gli angoli *A*, *B*, *D*, e però è circoscritto al dato Triangolo *ADB*. Il che era da farsi.

PROPOSIZIONE VI. PROBL.

FIG. 98. *In un dato cerchio inscrivere un quadrato* AEBD.

SI tirino pel centro *C* due diametri *AB*, *DE*, che ad angoli retti si seghino in esso centro, e si congiungano le rette *AE*, *AD*, *BE*, *BD*; dico che il quadrilineo *AEBD* sarà il quadrato inscritto nel dato cerchio. Imperocchè di tutti i triangoli *ACE*, *ACD*, *BCE*, *BCD* tutti i lati intorno agli angoli retti sono uguali; e però le basi loro *AE*, *AD*,
c 4. I. *BE*, *BD* parimente si uguagliano [c]; e gli angoli

AEB

AEB, *EBD*, *BDA*, *DAE* essendo ne' semicircoli sono retti [a], dunque il quadrilatero *AEBD* è il quadrato [b] che dovea inscriversi nel cerchio dato.

a 31. III.
b Defin. 29.

PROPOSIZIONE VII. PROBL.

Intorno al dato cerchio AEBD *descrivere un quadrato.*

FIG. 99.

TIrati, come nella precedente, i diametri *AB*, *DE*, che nel centro *C* si seghino ad angolo retto, si tirino per gli punti *A*, *B* le parallele al diametro *DE*, e per gli punti *D*, *E* le parallele al diametro *AB*; queste parallele faranno pure a' termini de' diametri angolo retto [c], e però saranno tangenti [d]; e tutti i lati *GH*, *HI*, *IF*, *FG* saranno uguali al diametro del cerchio, e però uguali tra loro; gli angoli pure *G*, *H*, *I*, *F*, in cui convengono esse tangenti, saranno retti, perchè nel parallelogrammo *FABG*, l' angolo *G* uguaglia l' opposto *FAC* [e], che è retto, l' angolo *F* uguaglia l' angolo opposto *GBC*, che pure è retto; e così nel parallelogrammo *ABHI* si mostrano pure gli altri angoli *H*, *I* essere retti; dunque *FIHG* è un quadrato circoscritto al dato cerchio: come era proposto di farsi.

c 29. I.
d 16. III.
e 34. I.

PROPOSIZIONE VIII. PROBL.

In un dato quadrato FGHI *inscrivere un cerchio.*

DIvidansi pel mezzo i lati ne' punti *A*, *E*, *B*, *D*, e condotte le rette *AB*, *ED*, che si segheranno in *C*, e saranno parallele a detti lati, congiungendo i termini di linee parallele, ed uguali [f]; però tutte le rette *CA*, *CE*, *CB*, *CD*, ugua-

f 33. I.

glian-

gliando la metà de' lati di esso quadrato, saranno uguali fra loro, onde col centro *C*, e con uno di questi raggi *CA* descritto un cerchio, passerà per gli altri punti *E*, *B*, *D*, e rimarrà toccato da' lati di esso quadrato, essendo qualunque angolo *BAI*, *CEH* ec. retto, come uguale all' angolo *I*, ovvero *G* opposto nel parallelogrammo *ABHI*, *DEHG* ec.[a]. Dunque detto circolo riesce inscritto nel dato quadrato; il che ec.

a 34. 1.

PROPOSIZIONE IX. PROBL.

FIG. 98. *A un dato quadrato* AEBD *circoscrivere un cerchio*.

SI tirino le diagonali *AB*, *DE* concorrenti in *C*, e perchè qualunque triangolo *AEB*, *EBD*, *BDA*, *DAE* è isoscele per l'ugualità de' lati del quadrato, tutti gli angoli *BAE*, *EBA* sono uguali[b] tra loro, e sono semiretti essendo retto l' angolo *AEB*, e gli altri due uguali ad un altro retto[c], dunque tutti gli angoli semiretti *CAE*, *CBA*, *CEB*, *CBE*, *CBD*, *CDB*, *CDA*, *CAD* essendo uguali, le rette *CA*, *CE*, *CB*, *CD* pure sono uguali[d], e però fatto centro *C*, con l' intervallo *CA* descritto un cerchio passerà per tutti gli altri punti *E*, *B*, *D*; onde sarà questo il cerchio, che dovea circoscriversi al dato quadrato.

b 5. 1.
c 32. 1.
d 6. 1.

PROPOSIZIONE X. PROBL.

FIG. 100. *Costruire un triangolo isoscele* ABE, *li cui angoli alla base* AEB, ABE, *siano ciascuno il doppio dell' angolo alla cima* BAE.

Di-

DIvidasi una retta *AB* in *D*, in maniera che il rettangolo *ABD* uguagli il quadrato *AD* [a], e col raggio *AB* descritto un circolo *BEF*, si adatti dal punto *B* alla circonferenza una retta *BE* uguale alla *AD*, e si congiunga *AE*; sarà il triangolo *ABE* isoscele per l' ugualità de' raggi; ed aggiunta la retta *ED*, circoscritto un cerchio al triangolo *ADE*, sarà la *BE* tangente, per essere il di lei quadrato, come quello di *AD*, uguale al rettangolo *ABD* [b], e però l' angolo *DEB* sarà uguale all' angolo *EAD* [c], dunque aggiunto di quà, e di là l' angolo *DEA*, sarà l' angolo *AEB*, uguale a' due angoli *EAD*, *DEA*; cioè all' angolo esterno *BDE* [d], ma ancora l' angolo *ABE* uguaglia l' angolo *AEB* [e], dunque gli angoli *BDE*, *ABE* sono uguali, e però il lato *DE* uguaglia il lato *EB* [f], cioè il lato *AD*: dunque ancora l' angolo *DEA* uguaglia l' angolo *EAD* [e]; e però sarà l' angolo *AEB* duplo dell' angolo *EAB*. Il che ec.

a 11. 11.
b 37. III.
c 32. III.
d 32. I.
e 5. I.
f 6. I.

PROPOSIZIONE XI. PROBL.

In un dato cerchio inscrivere un Pentagono DFGHI *equilatero, ed equiangolo.*

FIG. 101.

FAtto un triangolo isoscele *ABE*, di cui ciascheduno angolo sopra la base sia il doppio dell' angolo *A* alla cima [g], si inscriva nel cerchio il triangolo *DGH* equiangolo allo stesso *ABE* [h], poi divisi pel mezzo ambi gli angoli alla base *DGH*, e *DHG* colle linee *GI*, *HF* [i], si congiungano le rette *GF*, *FD*, *DI*, *IH*. Dico che questo sarà un Pentagono equilatero, ed equiangolo inscritto nel dato circolo; imperocchè gli angoli alla base *HG*

g 10. IV.
h 2. IV.
i 9. I.

di

di quel triangolo *DHG* equiangolo ad *ABE*, essendo il doppio dell' angolo *GDH*, divisi quelli pel mezzo, ne riusciranno tutti i cinque angoli *DGI*, *IGH*, *GHF*, *FHD*, *GDH* uguali, e però gli archi, sopra di cui essi angoli insistono, saranno uguali [a], e però ancora le rette a detti archi sottotese *DI*, *IH*, *HG*, *GF*, *FD*, sono uguali; onde questo Pentagono è equilatero; ed essendo l' arco *DI* uguale ad *FG*, aggiunto di comune l' arco *IHG*, sarà l' arco *DIG* uguale all' arco *IGF*, e però l' angolo *DFG* è uguale all' angolo *FDI* [b], e così degli altri; dunque esso Pentagono è ancora equiangolo. Il che ec.

a 26. III.

b 27. III.

PROPOSIZIONE XII. PROBL.

FIG. 102.

A un dato cerchio IFH *circoscrivere un Pentagono* ABEKL *equilatero, ed equiangolo.*

SI inscriva nel cerchio il pentagono *IDFGH*, *per l' antecedente*, e dal centro *C* condotti a qualunque angolo i raggi *CI*, *CD*, *CF* ec. si tirino a' medesimi le perpendicolari *AB*, *BE*, *EK*, *KL*, *LA*, che saranno tangenti del circolo. Dico essere il poligono da esse compreso un pentagono equilatero, ed equiangolo circoscritto al cerchio. Imperocchè, essendo *AI*, *AH* tangenti, saranno uguali [c], ed essendo uguali i raggi *CI*, *CH*, e retti gli angoli *CIA*, *CHA*, congiunta la *CA* sarà l' angolo *ACI* uguale ad *ACH*, ed *IAC* uguale ad *HAC* [d], dunque congiunta ancora *CB*, si proverà pure similmente l' angolo *BCD* uguale a *BCI*, e l' angolo *DBC* uguale ad *IBC*; pertanto *ACI* è la metà di *HCI*, ed *IAC* la metà di *IAH*, e pari-

c Coroll. 1. Pr. 36. III.

d 4. I.

rimente *BCI* è la metà di *ICD*, ed *IBC* la metà di *IBD*; onde essendo l' angolo *HCI* uguale ad *ICD*, per l' ugualità de' lati *HI*, *ID* [a], sarà l' angolo *ACI* uguale a *BCI*, ed essendo di quà, e di là dal punto *I* gli angoli retti, e comune il lato *IC* a' triangoli *ACI*, *BCI*, gli altri lati, e gli altri angoli saranno uguali [b], però *AI* essendo uguale ad *IB*, il lato *AB* è duplo di *AI*; similmente si proverà il lato *AL* essere duplo di *AH*; dunque essendo *AI* uguale ad *AH*, ancora *AB* sarà uguale ad *AL*; e così tutti i lati si proveranno uguali, ed essendo l' angolo *CBI* uguale a *CAI*, anche i loro doppj *DBI*, ed *HAI* saranno uguali, e così tutti gli altri angoli di questo pentagono, il quale sarà equilatero, ed equiangolo, circoscritto al dato cerchio, come dovea farsi.

a 28. III.

b 26. I.

Corollario. Nella stessa maniera, qualunque figura equilatera, ed equiangola sia iscritta nel cerchio, tirate da qualsivoglia angolo le tangenti, si proverà essere similmente la figura circoscritta equilatera, ed equiangola.

PROPOSIZIONE XIII. PROBL.

Ad un dato Pentagono equilatero, ed equiangolo ABEKL, *inscrivere un circolo.*

SI dividano pel mezzo due angoli prossimi *LAB*, *ABE* [c], colle rette *AC*, *BC* concorrenti in *C*, e da esso punto *C* si tirino sopra ciaschedun lato le perpendicolari, *CH*, *CI*, *CD*, *CF*, *CG*, queste saranno uguali, e però descritto il cerchio con uno de' raggi *CH*, passerà per tutti i punti *H*, *I*, *D*, *F*, *G*, e sarà toccato da i lati del dato pentagono,

c 9. I.

gono,

gono, cui sono perpendicolari essi raggi, onde gli sarà inscritto. Imperocchè ne' triangoli *ABC*, *CBE*, essendo uguali i lati *AB*, *BE*, ed il lato *BC* comune, e gli angoli *ABC*, *CBE* uguali, sarà *CA* uguale a *CE*, e l'angolo *CEB* uguale a *CAB*, e però ancor esso la metà dell' angolo *BEK*. Similmente ne' triangoli *CAB*, *CAL* si proverà *CL* uguale a *CB*, e l'angolo *CLA* uguale a *CBA*, e però ancora esso la metà dell'angolo *ALK*; e così pure sarà dalla retta *CK* diviso pel mezzo l'angolo *EKL*; e paragonando i triangoli *HAC*, *IAC*, in cui l'angolo *CAH* uguaglia *CAI*, e gli angoli in *H*, ed *I* sono retti, ed il lato *AC* comune, gli altri lati *CH*, *CI* saranno uguali, e parimente si proverà *CI* uguale a *CD*, e *CF* uguale a *CD*, e *CG* uguale a *CF*; dunque tutte queste perpendicolari sono raggi uguali, e però il cerchio passa per tutti quei punti, e riesce inscritto al dato pentagono, come dovea farsi.

Corollario. Così in qualunque figura equilatera, ed equiangola, divisi pel mezzo due angoli proissimi, e dal concorso delle linee dividenti condotte le perpendicolari a' lati, riescono uguali, e condotte agli altri angoli dallo stesso concorso altre rette, sono tutte uguali, e dividono pel mezzo gli altri angoli, come si è provato in questo pentagono, onde al medesimo modo gli si può inscrivere un cerchio.

PROPOSIZIONE XIV. PROBL.

Intorno al dato Pentagono equilatero, ed equiangolo IHGFD *circoscrivere un cerchio.*

Se-

SEgati per mezzo due angoli prossimi colle rette *IC*, *HC* concorrenti in *C*, le linee condotte dal punto *C* a tutti gli altri angoli saranno uguali [a], dunque col raggio *CI* descritto il cerchio passerà per tutti li detti angoli, e sarà circoscritto al dato Pentagono. Il che ec.

a *Corollar. Prop. preced.*

COROLLARIO. Nella stessa maniera potrà circoscriversi un cerchio a qualunque altra figura equilatera, ed equiangola.

PROPOSIZIONE XV. PROBL.

In un dato cerchio AEF *inscrivere un Esagono equilatero, ed equiangolo.* FIG. 103.

COndotto un diametro *AD* pel centro *C*, si applichino nel cerchio due rette, di quà, e di là dal punto *A*, uguali al raggio *AC*, quali siano *AB*, *AG* [b], e congiunte al centro le rette *BC*, *GC* si prolunghino alla periferia in *F*, *E*; indi tirate le rette *BE*, *ED*, *GF*, *FD* rimarrà inscritto nel cerchio un esagono equilatero, ed equiangolo; perchè essendo i triangoli *ABC*, *AGC* equilateri, ciascuno degli angoli di essi *ACG*, ed *ACB* sarà un terzo di due retti; però ancora *BCE*, che con gli altri due compisce due retti, sarà un altro terzo di due retti; e però saranno uguali i detti tre angoli, e gli opposti alla loro cima *ECD*, *DCF*, *FCG* [c]; e però tutti gli archi opposti a detti angoli, e le rette ad essi sottese sono uguali [d]; dunque *ABEDFG* è un esagono equilatero, ed ancora equiangolo, perchè gli angoli *GAB*, *ABE*, *BED* ec. insistono a quattro di quelli archi uguali.

b *Prop.* 1. IV.

c 15. I.

d 26. e 29. III.

PROPOSIZIONE XVI. PROBL.

FIG. 104. *In un dato cerchio* AEH *descrivere un Quindecagono equilatero, ed equiangolo.*

INscrivasi un pentagono *AIHGF*; nel dato cerchio[a], ed ancora un triangolo equiangolo ad un equilatero[b], che sarà esso ancora di lati uguali, *ADE*; dunque delle quindici parti della circonferenza ne conterrà cinque l' arco *AE*, e tre sole l' arco *AF*, e nel residuo *FE* vi saranno due di dette parti quintedecime; onde divisa *FE* pel mezzo in *K*[c], saranno *EK*, e *KF* parti quintedecime, ed applicando intorno alla circonferenza le linee rette uguali a ciascheduna delle corde *EK*, *KF*, sarà compiuto il quindecagono equilatero, ed equiangolo, insistendo qualunque angolo *FKE* di esso sopra tredici di quelle quintedecime parti. Il che ec.

a 11. IV.
b 2. IV.
c 30. III.

ELE-

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
DI EUCLIDE.
LIBRO V.

∽∽

DEFINIZIONI.

I. PARTE ALIQUOTA ſi chiama una grandezza minore di un altra grandezza maggiore, quando quella miſura queſta eſattamente.

II. MOLTIPLICE ſi dice poi queſta maggior grandezza di quella minore, da cui alquante volte è miſurata.

III PROPORZIONE, o talvolta RAGIONE, ſi dice la relazione di due grandezze del medeſimo genere, in ordine alla loro quantità comparate l' una con l' altra.

IV. PROPORZIONALITA', ovvero ANALOGIA, diceſi la ſimiglianza di alcune Proporzioni.

V. Quelle Grandezze ſi dicono AVER PROPORZIONE, le quali moltiplicate poſſono ſuperarſi l' una con l' altra.

VI. Si dice SIMILE, ovvero EGUALE, anzi LA MEDESIMA, eſſere la PROPORZIONE di una prima grandezza ad una ſeconda, e quella di una terza ad una quarta, quando preſe due ugualmente moltiplici della prima, e della terza, ed altre due, ſecondo qualunque numero, ugualmente moltipli-

ci della ſeconda, e della quarta, ſe il moltiplice della prima uguaglia il moltiplice della ſeconda, o ſia maggiore di eſſa, o minore, parimente il moltiplice della terza uguagli il moltiplice della quarta, o ſia riſpettivamente maggiore, o minore di eſſa.

VII. E queſte grandezze, che averanno ſimile proporzione ſi chiameranno PROPORZIONALI.

VIII. Ma ſe il moltiplice della prima ſuperaſſe il moltiplice della ſeconda, e l'ugualmente moltiplice della terza, come quello della prima, non eccedeſſe quello della quarta ugualmente moltiplice, come l'altro della ſeconda, ſi dirà LA PROPORZIONE della prima grandezza alla ſeconda, MAGGIORE di quella della terza alla quarta.

IX. La PROPORZIONALITÀ, o ANALOGIA deve conſiſtere almeno in tre termini, di cui il mezzano ſi prende due volte, una per conſeguente della prima proporzione, l'altra per antecedente della ſeconda uguale alla prima.

X. Quando tre grandezze ſaranno proporzionali, la prima alla terza ſi dirà avere DOPPIA PROPORZIONE di quella, che è tra la prima, e la ſeconda, o dell'altra uguale, che è tra la ſeconda, e la terza.

XI. Se ſaranno quattro grandezze continuamente proporzionali, averà la prima alla quarta TRIPLA PROPORZIONE di quella, che ha la prima alla ſeconda, o la ſeconda alla terza, o la terza alla quarta. Se ſaranno cinque, la prima all'ultima averà PROPORZIONE QUADRUPLA di quella, che ha la prima alla ſeconda, e di qualunque altra intermedia; e così ſempre creſcendo i termini dell'analo-

logia, la proporzione dell' estreme è moltiplice di quella di due prossime, secondo il numero di essi termini, detrattane l'unità.

XII. Delle quantità proporzionali si dicono OMOLOGI gli antecedenti fra loro, e li conseguenti pure tra di loro comparati.

AVVERTIMENTO.

Altre definizioni della Proporzione PERMUTATA CONVERSA ec. *si omettono, perchè dalle Proposizioni, che ne parlano susseguentemente, meglio s' intenderanno.*

Quanto alla similitudine, o ugualità delle proporzioni, definita al num. VI. *per gli ugualmente moltiplici degli antecedenti, che convengono congli ugualmente moltiplici de' conseguenti, secondo qualunque altra moltiplicazione, in uguagliarsi, avanzarsi, o mancarsi l' uno dall' altro: si avverta, che sebbene nelle quantità commensurabili, le quali esprimere si possono col numero delle parti uguali, che sono nell' una, e nell' altra, si può definire più chiaramente l' ugualità delle proporzioni con la definizione, che il medesimo Euclide dà nel suo Libro* VII. *de' numeri proporzionali, a cui altra proprietà non assegna, se non, che il primo sia ugualmente moltiplice del secondo, come il terzo del quarto, o la medesima parte, o altrettante parti, sia qualunque antecedente del suo conseguente: tuttavolta nelle quantità incommensurabili, di cui non può assegnarsi veruna misura comune, che sia alcune volte in una, ed alquante altre volte nell' altra, non potrebbe assegnarsi tale definizione di proporzionalità; e perciò si adatta quella condizione più universale degli ugualmen-*

te moltiplici de' termini antecedenti, che convengano nell'ugualità, nell' eccesso, o nel difetto, con altri ugualmente moltiplici de' conseguenti.

Le quantità, che si paragonano in proporzione, devono essere del medesimo genere secondo la definizione terza, onde non può paragonarsi una linea ad una superficie, nè ad un corpo, nè un peso ad un tempo, nè un moto ad un suono ec. bensì tutte le linee fra di loro, tutte le superficie tra loro, ogni corpo ad un altro, i pesi tra loro, li tempi fra loro ec. Però non è da attendersi un genere specialissimo, e subalterno, con cui differiscono le linee rette dalle curve, e le superficie piane dalle rotonde ec. ma solamente il genere più universale, di cui allora sono le grandezze, quando qualunque di esse moltiplicata può superare l' altra, secondo la definizione quinta. Così il diametro di un cerchio quadruplicato eccede la di lui circonferenza, e però si possono insieme paragonare una retta, ed una periferia, anzi qualunque altra curva di diversa specie; ed una superficie piana ad una sferica, o conica; e qualsivoglia corpo prismatico a qualunque rotondo. Ma quanto alla proporzionalità, o analogia delle proporzioni, possono essere li due primi termini dello stesso genere, e gli altri due, o del medesimo, o di genere diversissimo; così può essere un corpo ad un altro nella stessa proporzione, che una linea ad un altra linea; ovvero una superficie ad un altra superficie; o come un angolo rettilineo ad un altro pur rettilineo; o come un peso ad un altro peso; o come la velocità di un moto a quella di un altro ec. e così qualunque grandezza ad un altra grandezza dello stesso genere, può paragonarsi, come un numero ad un altro numero, o a qualche radice sorda.

SPIE-

SPIEGAZIONE

Di alcuni ſegni da adoperarſi per l' avvenire, per eſporre con più breve caratteriſmo le coſe da ſpiegarſi circa le proporzioni.

Il ſegno $+$ ſignifica aggiunta, di maniera che $A + B$ eſprime l' aggregato delle due quantità A, e B poſte inſieme.

Il ſegno $-$ ſignifica la detrazione di una grandezza dall' altra, come $A - B$ eſprimerebbe l' eccesſo della grandezza A ſopra l' altra B, detratta da quella.

Il ſegno $>$ ſignifica l' eſſere maggiore, e la contraria poſizione di eſſo $<$ importa l' eſſere minore. Così $A > B$ vuol dire, che A è maggiore di B; ma $C < D$, importa, che C ſia minore dell' altra D.

Il ſegno $=$ ſignifica l' ugualità, di maniera che $A = B$ eſprime, che la grandezza A uguaglia B; e così ſe foſſe eſpreſſo $E + F = M - N$, indicherebbe che la ſomma delle quantità E, ed F foſſe uguale all' eccesſo di M ſopra N, cioè alla quantità M, detrattane l' altra N, ſecondo le anteriori eſpresſioni.

La proporzione di una quantità ad un altra ſi eſpone con un punto interpoſto, e la proporzionalità, o analogia ſi eſprime con quattro punti intercetti fra le due proporzioni. Per eſempio $AB \cdot AC :: EF \cdot EG$ vuol dire, che la quantità AB alla quantità AC, ha la ſteſſa proporzione, che la quantità EF all' altra EG; ma ſe foſſe eſpreſſo $A \cdot B > C \cdot D$, importerebbe, che la proporzione di A a B foſſe maggiore dell' altra, che è tra C, e D.

La moltiplicazione di una quantità in un altra può esprimersi con la croce di S. Andrea, per esempio $AB \times CD$, vorrà dire la quantità AB moltiplicata in CD; e così $7 \times 4 = 28$. significa, essere sette via quattro uguale a ventiotto &c.

PROPOSIZIONE I.

FIG. 105.

Se siano quante si vogliano grandezze AD, FI, LO *ugualmente moltiplici di altrettante* E, K, P, *ciascuna di ciascuna, quante volte è moltiplice una di una, per esempio* AD *di* E, *tante volte sarà moltiplice la somma di tutte l' antecedenti* AD, FI, LO *dell' aggregato di tutte le conseguenti* E, K, P.

IMperocchè divisa AD nelle parti AB, BC, CD, uguali ad E, potrà dividersi ancora FI in altrettante parti FG, GH, HI, uguali a K; e così LO nelle parti LM, MN, NO, uguali a P; dunque $AB + FG + LM = E + K + P$; e similmente di nuovo $BC + GH + MN = E + K + P$, ed ancora $CD + HI + NO = E + K + P$; dunque quante volte una delle antecedenti AD è moltiplice di E, altrettante volte tutte le antecedenti $AD + FI + LO$ è moltiplice di tutte le conseguenti $E + K + P$; Il che ec.

PROPOSIZIONE II.

FIG. 106.

Se la prima grandezza AC *è moltiplice della seconda* D, *come la terza* GE *è moltiplice ugualmente della quarta* H; *ed una quinta* CB *sia ancora moltiplice della seconda* D, *come una sesta* GF *è moltiplice ugualmente della quarta* H, *sarà l' aggregato della prima, e della quinta* AC + CB, *ugualmen-*

mente moltiplice della seconda D, *come l' aggregato della terza, e della sesta* EG + GF, *è moltiplice della quarta* H.

IMperocchè il numero delle parti uguali alla *D*, che sono nella prima *AC*, uguagliando il numero delle parti uguali ad *H*, che sono nella terza *EG*; ed ancora il numero delle parti uguali a *D*, che sono nella quinta *CB*, uguagliando il numero delle parti uguali ad *H*, che sono nella sesta *GF*; dunque il numero delle parti uguali a *D*, che sono in *AC* + *CB*, uguaglia il numero delle parti uguali ad *H*, che sono in *EG* + *GF* [a], dunque l'aggregato *AC* + *CB* ugualmente è moltiplice della seconda *D*, come l' aggregato *EG* + *GF* è moltiplice della quarta *H*. Il che ec.

a *Assiom.* 2.

PROPOSIZIONE III.

FIG. 107.

Se la grandezza B *è moltiplice di* C, *come un altra* E *di* F, *ed* IA *moltiplice di* B, *come* MD *di* E, *sarà pure* IA *moltiplice di* C, *come* MD *di* F.

SI dividano le grandezze *IA*, *MD*, quella nelle parti *AG*, *GH*, *HI* uguali a *B*, questa nelle parti *DK*, *KL*, *LM*, uguali ad *E*; essendo adunque *AG* moltiplice di *C*; come *DK* di *F*, ed ancora *GH*, e *HI* moltiplice di *C*, come *KL*, ed *LM* di *F*, sarà tutta la *AI* moltiplice di *C*, come tutta la *DM* di *F* [b]. Il che ec.

b 2. V.

PROPOSIZIONE IV.

FIG. 108.

Essendo nella stessa proporzione A . B :: C . D, *prese due grandezze* E, F *ugualmente moltiplici degli antecedenti* A, C, *ed altre grandezze* G, H *egual-*

gualmente moltiplici de' conseguenti B, D, *saranno parimente proporzionali* E · G :: F · H.

IMperocchè prese due altre K, L ugualmente moltiplici di E, F, saranno queste pure ugualmente moltiplici di A, C [a]; e similmente prese M, N ugualmente moltiplici di G, H, saranno esse pure ugualmente moltiplici di B, D [a]; dunque se $K = M$, ancora $L = N$; se $K > M$, sarà pure $L > N$, se $K < M$, parimente $L < N$ [b]; dunque sarà $E \cdot G :: F \cdot H$ [b]. Il che ec.

a 3. v.

b Def. 6. v.

COROLLARIO. Quindi si osservi, che qualunque volta sono quattro grandezze proporzionali, ancora *convertendo*, cioè presi i conseguenti per antecedenti, e gli antecedenti per conseguenti, saranno pure proporzionali, cioè se $A \cdot B :: C \cdot D$, ancora $B \cdot A :: D \cdot C$; giacchè per la definizione sesta tutti gli ugualmente moltiplici degli antecedenti A, C si accordano in uguagliare, superare, o mancare dagli ugualmente moltiplici de' conseguenti B, D; dunque ancora gli ugualmente moltiplici di B, D, presi per antecedenti si devono accordare con gli ugualmente moltiplici di A, C, presi per conseguenti; e però ancora convertendo sono le grandezze proporzionali.

PROPOSIZIONE V.

FIG. 109.

Se la grandezza AB, *è moltiplice della grandezza* CD, *come la parte* AE, *levata dalla prima, è moltiplice della parte* CF, *levata dalla seconda, ancora la rimanente* EB *sarà moltiplice ugualmente della residua* FD.

Pon-

Pongasi *AG* ugualmente moltiplice di *FD*, come *AE* di *CF*; dunque sarà *GE* moltiplice di *CD*, come *AE* di *CF* [a], ma era *AB* moltiplice di *CD*, come *AE* di *CF*; dunque *GE* = *AB*; e tolta di comune la *AE*, sarà *AG* = *EB*; dunque ancora la rimanente *EB* è moltiplice della residua *FD*, come tutta la *AB* di tutta la *CD*, e come la parte levata *AE*, della parte levata *CF*; Il che ec.

a 1. 1.

PROPOSIZIONE VI.

Tav. VI. FIG. 110.

Se due grandezze AB, CD *sono ugualmente moltiplici di due* E, F, *e da quelle si traggano le due* AG, CH, *ancor esse ugualmente moltiplici di queste* E, F, *saranno le rimanenti* GB, HD, *o uguali alle medesime; o ugualmente moltiplici di esse.*

Essendo il numero delle parti contenute in *AB* uguali ad *E*, uguale al numero delle parti contenute in *CD*, uguali ad *F*, detratto dal primo il numero delle parti *E* contenute in *AG*, e dal secondo il numero uguale delle parti *F*, contenute in *CH*, il rimanente numero delle parti *E* contenute in *GB*, uguaglierà pure il numero delle parti *F* contenute in *HD* [b]; e però se *GB* = *E*, contenendola una volta sola, ancora *HD* = *F*, che la conterrà pure una sola volta; ma se *GB* resterà alquanto moltiplice di *E*, ancora *HD* rimarrà ugualmente moltiplice di *F*. Il che ec.

b Ass. 2.

PROPOSIZIONE VII.

FIG. 111.

Se siano due grandezze, A, B *tra di loro uguali, averanno a qualunque terza* C *la medesima pro-*

por-

porzione; ed ancora paragonata C *ad ambedue, averà l' istessa proporzione ad esse.*

CIò è per se stesso evidente; pure si dimostra, perchè le ugualmente moltiplici *D*, *E*, delle due uguali *A*, *B*, saranno pure uguali, e presa *F* in qualunque modo moltiplice di *C*, si accorderanno le moltiplici *D*, *E* in uguagliare, superare, o mancare dalla moltiplice *F*; per tanto [a] $A \cdot C :: B \cdot C$, e convertendo $C \cdot A :: C \cdot B$ [b]. Il che ec.

a Def. 6. v.
b Coroll. pr. 4. v.

PROPOSIZIONE VIII.

FIG. 112.

Delle disuguali grandezze AB, *e* D, *la maggiore* AB *ad una terza* K *averà maggior ragione, che la minore* D *alla medesima* K; *ma viceversa è maggiore la proporzione di* K *alla minore* D, *che alla maggiore* AB.

POsta $AC = D$, si moltiplichino ugualmente *AC*, e *CB* nelle *EF*, *FG* in maniera tale, che ognuna di queste moltiplici sia maggiore di *K*, indi si potrà moltiplicare essa *K*, in maniera, che riesca prossimamente maggiore di *EF*, ma minore di *EG*. Sia questa moltiplice *EH*; dunque *EG* essendo moltiplice di *AB*, come *EF* di *AC*, o della uguale *D* [c], il moltiplice di essa *AB* supera il moltiplice *EH* della grandezza *K*, laddove *EF* moltiplice di *D* è minore di *EH* moltiplice di *K*; però $AB \cdot K > D \cdot K$ [d]; e viceversa, perchè il moltiplice di *K*, cioè *EH* è maggiore di *EF*, che è il moltiplice di *D*, ma la stessa *EH* è minore di *EG* moltiplice di *AB*; però $K \cdot D > K \cdot AB$. Il che era da dimostrarsi.

c 1. v.
d Def. 8. v.

Se

PROPOSIZIONE IX.

Se le grandezze A, B *ad una terza* C *hanno la medesima proporzione, sarà* A = B; *e similmente se* C *ha l' istessa proporzione ad* A, *ed a* B, *è* A = B. FIG. 113.

PErchè se non fosse $A = B$, ma una di loro maggiore per esempio $A > B$, sarebbe la proporzione di $A \cdot C > B \cdot C$; e la proporzione $C \cdot B > C \cdot A$ [a]; dunque essendo $A \cdot C :: B \cdot C$, ovvero $C \cdot A :: C \cdot B$, è necessario, che sia $A = B$. Il che ec.

[a] 8. v.

PROPOSIZIONE X.

Se A *a* C *ha maggior proporzione, che* B *a* C, *sarà* A > B; *e se* C *a* B *ha maggior proporzione, che* C *ad* A, *parimente* B < A. FIG. 114.

IMperocchè se fosse $A = B$, sarebbe $A \cdot C :: B \cdot C$ [b]; e se fosse $A < B$, sarebbe $A \cdot C < B \cdot C$, contro la ipotesi; dunque essendo $A \cdot C > B \cdot C$, conviene che sia $A > B$. Similmente se fosse $B = A$, sarebbe $C \cdot B :: C \cdot A$, e se fosse $B > A$, sarebbe $C \cdot B < C \cdot A$; dunque essendo $C \cdot B > C \cdot A$, è $B < A$. Il che ec.

[b] 7. v.

PROPOSIZIONE XI.

Se le proporzioni di A *a* B, *e di* E *ad* F *sono uguali ad una terza di* C *a* D, *saranno quelle ancora uguali tra loro.* FIG 115.

SI prendano gli ugualmente moltiplici degli antecedenti, come $3\,A$, $3\,E$, $3\,C$; e gli ugualmente moltiplici de' conseguenti, per esempio $4\,B$,

4 F

4 F, 4 D; perchè dunque $A \cdot B :: C \cdot D$, e parimente $E \cdot F :: C \cdot D$, ſe 3 $A = 4 B$, ancora 3 $C = 4 D$; ma ſe 3 $C = 4 D$, ancora 3 $E = 4 F$; dunque ſe 3 $A = 4 B$, ancora 3 $E = 4 F$; ſe poi 3 $A > 4 B$, ſarà 3 $C > 4 D$, ed allora ſarà pure 3 $E > 4 F$; dunque eſſendo 3 $A > 4 B$, ancora 3 $E > 4 F$; e ſe 3 $A < 4 B$, ſarà 3 $C < 4 D$, onde in tal caſo parimente 3 $E < 4 F$; dunque ſi accordano gli ugualmente moltiplici di A, e di E in uguaglianza, eccеſſo, o difetto in riguardo a gli ugualmente moltiplici di B, ed F; e però ſono $A \cdot B :: E \cdot F$; dunque le proporzioni uguali a una terza, ſono pure uguali tra loro; Il che ec.

PROPOSIZIONE XII.

FIG. 116. *Se quante grandezze ſi vogliano dello ſteſſo genere, ſiano proporzionali, cioè ſe* $A \cdot B :: C \cdot D :: E \cdot F$, *come ſta un antecedente ad un conſeguente, così tutti li antecedenti a tutti li conſeguenti.*

SI piglino alcuni ugualmente moltiplici degli antecedenti, per eſempio 3 A, 3 C, 3 E; ed altri ugualmente moltiplici de' conſeguenti, come 4 B, 4 D, 4 F; perchè dunque $A \cdot B :: C \cdot D :: E \cdot F$, ſe 3 $A = 4 B$, ancora 3 $C = 4 D$, e 3 $E = 4 F$, e però ancora 3 $A +$ 3 $C +$ 3 $E = 4 B + 4 D + 4 F$; e ſe 3 $A > 4 B$, ſarà pure 3 $C > 4 D$, ed anche 3 $E > 4 F$: onde 3 $A +$ 3 $C +$ 3 $E > 4 B + 4 D + 4 F$; e ſe 3 $A < 4 B$, ſaranno altresì 3 $C < 4 D$, come pure 3 $E < 4 F$, e 3 $A +$ 3 $C +$ 3 $E < 4 B + 4 D + 4 F$; dunque eſſendo 3 A moltiplice di A, come 3 $A +$ 3 $C +$ 3 E è moltiplice di $A + C + E$, e parimente 4 B moltiplice di B, come 4 $B +$

4 D

$4D + 4F$ è moltiplice di $B + D + F$; ed accordandosi questi moltiplici di A, e di $A + C + E$, con gli ugualmente moltiplici di B, e di $B + D + F$, in uguagliarsi, o avanzarsi, o essere minori quelli di questi, sarà $A \cdot B :: A + C + E \cdot B + D + F$. Il che dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE XIII.

FIG. 117.

Se A *a* B *ha l'istessa proporzione, che* C *a* D, *ma la proporzione di* C *a* D *sia maggiore di quella di* E *ad* F, *ancora la proporzione di* A *a* B *sarà maggiore di* E ad F.

IMperocchè presi li ugualmente moltiplici degli antecedenti C, ed E, ed altri ugualmente moltiplici de' conseguenti D, F, essendo $C \cdot D > E \cdot F$ potrà essere il moltiplice del primo antecedente $3C$ maggiore del moltiplice $4D$ del primo conseguente, ma il moltiplice $3E$ del secondo antecedente sarà minore del moltiplice $4F$ del secondo conseguente [a]; ma preso ancora $3A$ ugualmente moltiplice di A, come $3C$ di C, ed ancora preso $4B$ moltiplice di B, come $4D$ di D, essendo $A \cdot B :: C \cdot D$, siccome $3C > 4D$, così ancora $3A > 4B$; dunque essendo $3E < 4F$, è $A \cdot B > E \cdot F$ [a]. Il che dovea dimostrarsi.

a Defin. 8. lib. V.

PROPOSIZIONE XIV.

FIG. 118.

Essendo A · B :: C · D, *se* A = C, *ancora* B *sarà* = D, *se* A > C, *ancora* B > D; *e se* A < C, *anche* B < D.

IMperocchè se $A = C$, sarà $A \cdot B :: C \cdot B$ [b]; ma $A \cdot B :: C \cdot D$, dunque $C \cdot B :: C \cdot D$ [c]; e però

b 7. V.

c 11. V.

$B =$

a 9. v. b 8. v. c 13. v. d 10 v.

$B = D$ [a]; ma se $A > C$, sarà $A \cdot B > C \cdot B$ [b], onde ancora sarà $C \cdot D > C \cdot B$ [c], dunque $B > D$ [d]. Similmente, se sarà $A < C$, si proverà essere $B < D$; dunque di quattro grandezze proporzionali, secondo che la prima è uguale, maggiore, o minore della terza, ancora la seconda è parimente uguale, maggiore, o minore della quarta. Il che ec.

PROPOSIZIONE XV.

FIG. 119.

Le Parti E, F *sono proporzionali co' loro ugualmente moltiplici* AD, GK.

IMperocchè divise AD, GK, nelle parti uguali ad E, F, che nella prima sono AB, BC, CD, ciascuna $= E$, e nell' altra sono GH, HI, IK, ciascuna $= F$, sarà $E \cdot F :: AB \cdot GH :: BC \cdot HI :: CD \cdot IK$, dunque ancora $E \cdot F :: AB + BC + CD \cdot GH + HI + IK$ [e] $:: AD \cdot GK$. Il che ec.

e 12. v.

PROPOSIZIONE XVI.

FIG. 120.

Se quattro grandezze del medesimo genere sono proporzionali, cioè A · *B* :: C · D *ancora* permutando, *cioè paragonando tra loro gli antecedenti, ed i conseguenti*, A · C :: B · D, *sono proporzionali*.

IMperocchè prese due ugualmente moltiplici E, F delle due prime A, B, ed altre due G, H ugualmente moltiplici delle due ultime C, D, sarà $E \cdot F :: A \cdot B$ [f] $:: C \cdot D$ [g] $:: G \cdot H$ [f], però essendo proporzionali $E \cdot F :: G \cdot H$ [g], se $E = G$, ancora $F = H$; se $E > G$, sarà $F > H$; se $E < G$, ancora $F < H$ [h], dunque gli ugualmente moltiplici di A, B, confrontando con gli ugualmente moltiplici di C, D nell' essere uguale, maggiore, o minore l' uno dell'

f 15. v. g 11. v. h 14. v.

dell' altro suo corrispondente, sarà $A \cdot C :: B \cdot D$[a], e però le grandezze proporzionali, ancora permutando, sono proporzionali.

a Def. 6. v.

PROPOSIZIONE XVII.

FIG. 121.

Se sono proporzionali $AB \cdot BC :: DE \cdot EF$, *ancora* dividendo $AB - BC \cdot BC :: DE - EF \cdot EF$, *cioè* $AC \cdot CB :: DF \cdot FE$.

SI prendano delle AC, CB, DF, FE le ugualmente moltiplici GH, HI, LM, MN; e poi delle CB, FE altre ugualmente moltiplici IO, NP. Saranno dunque GI, ed LN ugualmente moltiplici di AB, e DE, come GH di AC, ed LM di DF[b] ed ancora HO sarà moltiplice di CB, come MP di FE[c]; dunque essendo $AB \cdot BC :: DE \cdot EF$, se $GI = HO$, sarà pure $LN = MP$, e se maggiore, o minore sarà GI di HO, parimente sarà maggiore, o minore LN di MP; ma se $GI = HO$, tolto di comune HI, sarà $GH = IO$, ed essendo allora $LN = MP$, tolto di comune MN, sarà pure $LM = NP$; e parimente essendo $GI > HO$, sarà $GH > IO$; ed allora essendo pure $LN > MP$, sara parimente $LM > NP$; e se $GI < HO$, sarà $GH < IO$, onde essendo $LN < MP$, sarà $LM < NP$; dunque GH, ed LM ugualmente moltiplici di AC, e DF, si accordano con IO, ed NP ugualmente moltiplici di CB, ed FE nell' essere uguale, maggiore, o minore l' uno dell' altro; pertanto $AC \cdot CB :: DF \cdot FE$; onde le grandezze, che composte erano proporzionali, ancora divise sono proporzionali.

b 1. v.

c 2. v.

PROPOSIZIONE XVIII.

FIG. 122.

Essendo le divise grandezze proporzionali, come AC · CB :: DE · EF, *ancora* composte *saranno proporzionali* AB · BC :: DF · FE.

Altrimenti sia *AB · BG :: DF · FE;* dunque dividendo sarebbe [a] *AG · GB :: DE · EF ::* *AC · CB* [b], dunque se fosse $AG > AC$, sarebbe $GB > CB$ [c], il che è impossibile; similmente essendo $Ag < AC$, sarebbe $gB < CB$; il che pure è assurdo, dovendo essere il tutto maggiore, e non minore d'una sua parte [d]. Dunque sta *componendo AB · BC :: DF · FE*; Il che ec.

a 17. v.
b 11. v.
c 14. v.
d *Ass.* 6.

Corollario. Quindi può provarsi, che essendo tutta la *AB* alla parte *BC*, come tutta la *DF* alla parte *FE*, ancora tutta la *AB* alla residua *AC* è come tutta la *DF* alla residua *DE*, perchè dividendo [a] sarà *AC · CB :: DE · EF*, e convertendo [e] *CB · CA :: EF · DE*, dunque componendo [f] *AB · AC :: DF · DE*. Il che si dice *Conversione di ragione*, posta però dagl'Interpreti d'Euclide per Corollario della proposizione seguente, in cui la dimostrano solo in grandezze dello stesso genere, usandosi della permutazione, la quale non si adatterebbe al paragone di due quantità di genere diverso alle loro parti, ed a' loro residui, come importa questa *conversione di ragione*.

e *Coroll. Pr.* 4. v.
f 18. v.

PROPOSIZIONE XIX.

FIG. 123.

Essendo tutta la AB *a tutta la* CD, *come la parte della prima* AE *alla parte della seconda* CF, *ancora la rimanente* EB *alla rimanente* FD *starà co-*

come tutta la AB *a tutta la* CD, *o come la parte levata* AE *alla parte levata* CF.

IMperocchè essendo $AB \cdot CD :: AE \cdot CF$, permutando [a] $AB \cdot AE :: CD \cdot CF$, e dividendo [b] $EB \cdot AE :: FD \cdot CF$, e di nuovo permutando [a] $EB \cdot FD :: AE \cdot CF$, o come $AB \cdot CD$ [c]. Il che ec.

a 16. v.
b 17. v.
c 11. v.

PROPOSIZIONE XX.

FIG. 124.

Se siano tre grandezze A, B, C *da una parte, e tre altre* D, E, F *da un' altra, e sia* A · B :: D · E, *ed ancora* B · C :: E · F, *se la prima* A *è maggiore, minore, ovvero uguale alla terza* C *da una parte, sarà pure dall' altra banda la prima* D *rispettivamente maggiore, minore, o uguale alla terza* F.

PErchè se $A > C$, sarà $A \cdot B > C \cdot B$ [d]; ma era $A \cdot B :: D \cdot E$, e convertendo [e] $C \cdot B :: F \cdot E$; dunque $D \cdot E > F \cdot E$ [f], dunque ancora $D > F$ [g]. Nell'istessa maniera si proverà, che se sarà $A < C$, ancora $D < F$, e se $A = C$, ancora $D = F$; dunque si accordano le prime ad eccedere, mancare, o uguagliare le terze. Il che ec.

d 8. v.
e Coroll. prop. 4. v.
f 13. v.
g 10. v.

PROPOSIZIONE XXI.

FIG. 125.

Se l' istesse grandezze fossero talmente disposte, che la prima A *alla seconda* B *nella prima serie, fosse come la seconda* E *alla terza* F *dell' altra serie, e la seconda* B *alla terza* C *della prima serie, fosse come la prima* D *alla seconda* E *di quell' altra, parimente se* A > C, *anche* D > F; *se* A < C, *anche* D < F, *se* A = C, *ancora* D = F.

SE $A > C$ sarà pure $A \cdot B > C \cdot B$; ma essendo $A \cdot B :: E \cdot F$, e convertendo $C \cdot B :: E \cdot D$; sarà pure $E \cdot F > E \cdot D$, dunque ancora $D > F$ [a] similmente se $A = C$, sarà $A \cdot B :: C \cdot B$, e però ancora $E \cdot F :: E \cdot D$, dunque ancora $D = F$; e così se fosse $A < C$ si proverebbe $D < F$; dunque si concordano le prime colle terze nell' essere l' una all' altra maggiore, o uguale, o minore. Il che ec.

a 10. v.

PROPOSIZIONE XXII.

FIG. 126.

Se siano quante si vogliano grandezze in una serie A, B, C, D, *ed altrettante in un altra* E, F, G, H, *disposte con l' istesso ordine proporzionali, cioè* A · B :: E · F; *e* B · C :: F · G, *ed ancora* C · D :: G · H, *e così se ve ne fossero dell' altre, sarà* per l' ugualità ordinata *la prima all' ultima nella prima serie, come pure la prima all' ultima nella seconda, cioè* A · D :: E · H.

SI piglino $3A$, $3E$ ugualmente moltiplici delle due prime, e $2B$, $2F$ ugualmente moltiplici delle seconde, e $4C$, $4G$ ugualmente moltiplici delle terze. Essendo $A \cdot B :: E \cdot F$, sarà ancora $3A \cdot 2B :: 3E \cdot 2F$ [b]; ed essendo pure $B \cdot C :: F \cdot G$, sarà ancora $2B \cdot 4C :: 2F \cdot 4G$; dunque se $3A$ è maggiore, minore, o uguale a $4C$, sarà pure $3E$ maggiore, minore, o uguale a $4G$ [c]; dunque starà $A \cdot C :: E \cdot G$, perchè gli ugualmente moltiplici degli antecedenti si accordano con gli ugualmente moltiplici de' conseguenti; e siccome si è provato essere la prima alla terza della prima serie, come la prima alla terza della serie seconda, così per essere $A \cdot C :: E \cdot G$; ed indi $C \cdot D :: G \cdot H$,

b 4. v.

c 20. v.

:: $G \cdot H$, si potrà dedurre, essere $A \cdot D :: E \cdot H$; e così sempre la prima all' ultima in una serie, starà come la prima all' ultima nell' altra serie, per ugualità ordinata. Il che ec.

PROPOSIZIONE XXIII.

FIG. 127.

Se in una serie la prima grandezza A *alla seconda* B *sta come nell' altra serie, la seconda* E *alla terza* F, *indi nella prima sia la seconda* B *alla terza* C, *come nella seconda serie, è la prima* D *alla seconda* E: *sarà*, per ugualità perturbata, *la prima grandezza alla terza di una serie, come la prima alla terza dell' altra serie, cioè* A · C :: D · F.

DElle grandezze A, B, e D siano ugualmente moltiplici $2A$, $2B$, $2D$, e dell' altre C, E, F siano ugualmente moltiplici $3C$, $3E$, $3F$. Perchè $A \cdot B :: E \cdot F$ sarà ancora $2A \cdot 2B :: 3E \cdot 3F$ [a]; ed essendo $B \cdot C :: D \cdot E$, sarà pure $2B \cdot 3C :: 2D \cdot 3E$ [b], dunque se $2A = 3C$, ancc a $2D = 3F$, se $2A > 3C$, sarà $2D > 3F$, se $2A < 3C$, anche $2D < 3F$ [c]; pertanto sono per ugualità perturbata proporzionali $A \cdot C :: D \cdot F$. Il che ec.

a 15. v.
b 4. v.
c 21. v.

PROPOSIZIONE XXIV.

FIG. 128

Se sarà la prima grandezza A *alla seconda* C, *come la terza* D *alla quarta* F, *e la quinta* B *alla seconda* C, *come la sesta* E *alla quarta* F, *sarà ancora la prima con la quinta alla seconda, come la terza con la sesta alla quarta, cioè* A + B · C :: D + E · F.

IMperocchè essendo $A \cdot C :: D \cdot F$, e convertendo $C \cdot B :: F \cdot E$, sara per l'ugualità ordinata $A \cdot$

 B ::

a 22. v. $B :: D \cdot E$[a], e componendo $A + B \cdot B :: D + E \cdot E$[b];
b 18. v. ma ancora $B \cdot C :: E \cdot F$, dunque $A + B \cdot C :: D + E \cdot F$[a], per l'ugualità ordinata. Il che ec.

PROPOSIZIONE XXV.

FIG. 129. *Siano quattro grandezze dell' istesso genere proporzionali* AB · C :: DE · F, *la massima* AB *con la minima* F *sarà maggiore dell' altre due, cioè* AB + F > C + DE.

SI tagli dalla prima *AB* la parte *AG* = alla seconda *C*, e dalla terza *DE* la *DH* = alla quarta *F*; dunque $AB \cdot AG :: DE \cdot DH$, e permutando[c] tutta la *AB* a tutta la *DE* come la parte levata *AG* alla parte levata *DH*; e però ancora la rimanente *GB* alla rimanente *HE* sarà come tutta la *AB* a tutta la *DE*[d]: ma $AB > DE$, dunque ancora $BG > HE$, e sono $GA = C$, ed $HD = F$, onde $AG + F = C + HD$; dunque sono $BG + GA + F > HE + HD + C$, cioè la massima *AB* con la minima *F*, maggiore dell'altre due $ED + C$. Il che era da dimostrarsi.

c 16. v.
d 19. v.

ELE-

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
DI EUCLIDE
LIBRO VI.

∽∽

DEFINIZIONI.

I. FIgure rettilinee *simili* si dicono quelle, in cui ciascun angolo dell' una, uguaglia quello, che gli corrisponde nell' altra, e che d' intorno a gli uguali angoli hanno i lati proporzionali.

II. Diconsi *Reciproche* quelle figure, in cui un lato dell' una ad un lato dell' altra stia proporzionalmente, come un lato di questa seconda ad un lato di quella prima.

III. Una retta *AB* si dirà segata *secondo l' estrema, e media ragione* in *C*, se sia tutta ad una parte, come questa parte alla rimanente, cioè *AB* · *BC* :: *BC* · *CA*.

Tav. VII: FIG. 13

IV. L' *Altezza* di qualsivoglia figura è la perpendicolare condotta dalla cima alla base.

V. Si dice una proporzione *Composta* di più proporzioni, quando le quantità di queste moltiplicate insieme fanno la quantità di quella.

AVVERTIMENTO.

La quantità delle proporzioni suol prendersi in più modi. Da alcuni s' intende quantità della propor-

zione il di lei denominatore; per eſempio la proporzione dupla ha per denominatore il binario; la tripla il ternario; la ſeſquialtera una frazione $\frac{3}{2}$; e così tutte l' altre proporzioni poſſono denominarſi da una frazione, in cui l'antecedente ſia poſto di ſopra come numeratore, ed il conſeguente al di ſotto, come denominatore; così i denominatori di più proporzioni, ſe ſi moltiplicano inſieme, ne riſulta il denominatore della proporzione compoſta di quelle; per eſempio componendoſi la dupla con la tripla, ne riſulta la proporzione ſeſtupla, perchè $2 \times 3 = 6$; ſimilmente queſta proporzione ſeſtupla compoſta con un altra proporzione ſeſquialtera farà la proporzione nonupla, perchè li denominatori di eſſe moltiplicati inſieme $6 \times \frac{3}{2}$ fanno $\frac{18}{2} = 9$; ſe poi ſi doveſſero comporre delle proporzioni di quantità incommenſurabili, ſarà più difficile il trovarne il denominatore, che talvolta non potrà eſprimerſi nè meno per via di radici quadre, o cubiche ec.

Da altri poi ſi ſuppone, che le quantità delle proporzioni, di cui quì tratta Euclide, non ſiano altro, che i termini delle medeſime: ſicchè per comporre le ragioni di AB a CD, e di EF a GH, baſti moltiplicare inſieme gli antecedenti, ed indi li conſeguenti tra loro, e tra queſti prodotti riuſcirà la proporzione di $AB \times EF$ a $CD \times GH$, compoſta delle date proporzioni AB a CD, ed EF a GH: e parimente ſe ſi vorrà aggiungervi un altra ragione di I a K da comporſi con l' altre, ne riſulterà compoſta la proporzione di $AB \times EF \times I$ a $CD \times GH \times K$; e così dell' altre. E perchè i termini delle propoſte ragioni potrebbero eſſere tali, che non poteſſero moltiplicarſi inſieme: per eſempio ſe una delle

FIG. 131.

le componenti ragioni fosse di due angoli, un altra di due pesi, una di due tempi ec. allora basterà esprimere quelle date ragioni in linee, o numeri proporzionali a quegli altri termini; che così potranno insieme moltiplicarsi.

Il modo però, con cui l' istesso Euclide nella Proposizione 23 *di questo libro sesto, si serve della composizione delle proporzioni, mostra doversi avvertire, che se tra due termini* A, B *s' interponga uno, due, o più altri termini del medesimo genere, come* E, F, G, *la ragione degli estremi* A · B *può intendersi composta di tutte le ragioni, che sono fra i prossimi termini; cioè di* A · E, *di* E · F, *di* F · G, *e di* G · B, *perchè in fatti* A · B :: A *moltiplicata in* E, in F, *e in* G, *all' istessa* B *moltiplicata ne' medesimi termini* E, F, G [a], *dunque tutti gli antecedenti moltiplicati insieme, a tutti li conseguenti insieme moltiplicati, hanno ragione composta di tutte le ragioni, che ha ciascuno antecedente al suo conseguente. E quindi è, che se la prima grandezza alla seconda ha la medesima ragione, che la seconda alla terza, e questa alla quarta, e la quarta alla quinta, e così in una continua serie di Analogia, dicesi dal medesimo Euclide, che la prima alla terza averà doppia proporzione della prima alla seconda, e la prima alla quarta ne averà proporzione tripla, ec.* [b], *per essere quella della prima alla terza composta di due proporzioni uguali, e la prima alla quarta avendo ragione composta di tre uguali proporzioni ec.*

FIG. 132.

a 15. v.

b Def. 10. e 11. v.

PROPOSIZIONE I.

Li triangoli ABC, ABD, *ed ancora li parallelo-*

FIG. 133.

logrammi ABCF, ABDE, *che hanno la medesima altezza, sono tra di loro, come le basi* BC, BD.

POsta *BI* moltiplice in qualunque modo di *BD*, e tirata la retta *IA*, sarà il triangolo *IAB* ugualmente moltiplice di *ABD*, come la base *IB* della base *BD*, perchè essendo le parti *DH*, *HI* uguali a *BD*, congiunta ancora *HA*, saranno li triangoli *HAD*, *IAH* uguali ad *ABD* [a], essendo tra le medesime parallele *DC*, *EF*. Similmente presa *BG* moltiplice di *BC*, sarà, congiunta la *AG*, il triangolo *ABG* ugualmente moltiplice di *ABC*, come *GB* di *BC*; e secondo che riesca $BG = BI$, ancora sarà $ABG = ABI$; e se $BG > BI$, sarà purè $ABG > ABI$; se $BG < BI$, ancora $ABG < ABI$; dunque gli ugualmente moltiplici del triangolo *ABC*, e della sua base *BC*, si accordano con gli ugualmente moltiplici del triangolo *ABD*, e della sua base *BD*, in uguagliarsi, avanzarsi, o essere avanzati l' uno dall' altro; però il triangolo al triangolo è come la base alla base [b]. E perchè li parallelogrammi *ABCF*, *ABDE* sono doppj de' triangoli *ABC*, *ABD* [c], però sono nell' istessa ragione di tali triangoli [d], dunque ancora essi parallelogrammi ugualmente alti, sono come le loro basi. Il che ec.

a 38. I.
b Def. 6. v.
c 41. I.
d 15. v.

PROPOSIZIONE II.

FIG. 134.

Se nel triangolo ABC *si conduce una linea* DE *parallela alla base* BC, *essa taglierà i lati* AB, AC *proporzionalmente ne' punti* D, E; *e qualunque volta una linea, come* DE *taglierà i lati* AB, AC *proporzionalmente, sarà essa parallela alla base* BC.

Si

SI tirino le rette *BE*, *CD*; saranno i triangoli *BDE*, *CED* uguali[a], essendo su la stessa base *DE*, e fra le medesime parallele descritti; dunque *ADE* . *BDE* :: *ADE* . *CED*[b], ed è *ADE* . *BDE* :: *AD* . *BD*[c], essendo triangoli ugualmente alti sopra quelle basi; e similmente *ADE* . *CED* :: *AE* . *EC*[c]; dunque *AD* . *BD* :: *AE* . *EC*[d]. Il che era da dimostrarsi quanto alla prima parte.

a 37. I.
b 7. V.
c I. VI.
d II. V.

Quanto poi alla seconda, essendo *AD* . *DB* :: *AE* . *EC*, sarà *ADE* . *BDE* :: *ADE* . *CED*[c]; dunque *BDE* = *CED*[e]; e però le rette *DE*, *BC* sono parallele[f]. Il che era in secondo luogo da dimostrarsi.

e 9. V.
f 34. I.

PROPOSIZIONE III.

FIG. 135

Se nel triangolo BAC *l' angolo* A *si divide pel mezzo dalla retta* AD, *segante la base* BC *in* D, *saranno i segmenti della base proporzionali a' lati, cioè* BD . DC :: AB . AC; *e viceversa qualunque volta sia* BD . DC :: AB . AC, *la retta, che congiunge l' angolo* A *col punto* D, *cioè* AD, *taglia pel mezzo il detto angolo* BAC.

SI tiri dal punto *C* la retta *CE* parallela alla *AD*[g], la quale concorra col lato *BA* prolungato in *E*; perchè dunque l' angolo *BAD* = *DAC*; ed è *BAD* = *AEC*, e *DAC* = *ACE*, per le parallele[h], sarà pure *AEC* = *ACE*; e però *AC* = *AE*[i], ed è *BA* . *AE* :: *BD* . *DC*[k], dunque *BA* . *AC* :: *BD* . *DC*. Che se fosse *BD* . *DC* :: *BA* . *AC*, e congiunta la *DA*, gli si tiri la *CE* parallela, sarà ancora *BA* . *AE* :: *BD* . *DC*[k] :: *BA* . *AC*; dunque sarà *AC* = *AE*[l], onde l' angolo *AEC* = *ACE*; ma *BAD* = *AEC*, ed *ACE* = *DAC*[h],

g 31. I.
h 29. I.
i 6. I.
k 2. VI.
l 9. V.

dun-

dunque gli angoli BAD, DAC saranno uguali, onde l' angolo BAC dalla retta AD è diviso pel mezzo. Il che ec.

PROPOSIZIONE IV.

FIG. 136. *Ne' triangoli equiangoli* ABC, DCE, *i lati, che sono intorno a gli angoli uguali, sono proporzionali, ed i lati omologhi sono quelli, che sono sottoposti a gli angoli uguali.*

POngasi per diritto CE con BC, e prolungati i lati BA, ED concorrano in F. Perche dunque l' angolo ABC è uguale all' angolo DCE, e l' angolo $ACB = CED$, sono parallele BAF a CD, ed AC ad EDF [a], onde $ACDF$ è un parallelogrammo, in cui $CA = DF$, e $CD = AF$ [b], dunque essendo $BA \cdot AF :: BC \cdot CE :: FD \cdot DE$ [c], sono $BA \cdot CD :: BC \cdot CE :: AC \cdot DE$, e permutando $BA \cdot BC :: CD \cdot CE$; e $BC \cdot AC :: CE \cdot DE$ [d], onde per l' ugualità ordinata, ancora $BA \cdot AC :: CD \cdot DE$ [e]; dunque i lati intorno agli angoli uguali sono proporzionali. Il che ec.

a 28. I.
b 34. I.
c 2. VI.
d 16. V.
e 22. V.

COROLLARIO. Quindi si ha, che i triangoli equiangoli sono figure simili [f], avendo i lati proporzionali intorno a' loro angoli uguali.

f Def. 1. VI.

PROPOSIZIONE V.

FIG. 137. *Se i triangoli* ABC, DEF *hanno i lati proporzionali* AB · BC :: DE · EF, *e* BC · AC :: EF · FD, *averanno ciascun angolo uguale al suo corrispondente, opposto a' lati omologhi.*

FAcciasi l' angolo $FEG = CBA$, e l' angolo $EFG = BCA$, e convenendo le rette EG, FG in

G;

G, riuſcirà l' angolo $G = BAC$[a]; dunque eſſendo equiangolo EGF a BAC, ſarà $GE \cdot EF :: AB \cdot BC$[b] $:: DE \cdot EF$, dunque $GE = DE$[c]; ſimilmente ſarà $GF \cdot EF :: AC \cdot CB$[b] $:: DF \cdot EF$, e però ancora $GF = DF$[c]; ed eſſendo il lato EF comune a' triangoli EGF, EDF, che hanno gli altri lati uguali, però ſaranno ancora eſſi equiangoli[d], dunque eſſendo EGF equiangolo ad ABC, ancora EDF è allo ſteſſo ABC equiangolo. Il che ec.

a 32. I.
b 4. VI.
c 9. V.
d 8. I.

PROPOSIZIONE VI.

Se due triangoli ABC, DEF *intorno ad angoli* A = D *abbiano proporzionali i lati* AB · AC :: ED · DF, *ſaranno ancora gli altri angoli uguali, cioè* B = E, *ed ancora* C = F, *i quali ſono ſottopoſti a' lati omologhi.*

FIG. 138.

SI ponga nel lato AB la parte $AG = DE$, e la parte AH del lato AC facciaſi $= DF$. Congiunta la GH ſarà $= EF$[e], eſſendo intorno gli angoli A, D uguali i lati; ma la GH è parallela a BC[f], e però gli angoli AGH, $= ABC$, ed $AHG = ACB$[g], dunque il triangolo ABC eſſendo equiangolo ad AGH, e queſto ad EDF, ſono i triangoli ABC, EDF pure equiangoli. Il che ec.

e 4. I.
f 2. VI.
g 29. I.

PROPOSIZIONE VII.

Ne' triangoli ABC, DEF, *ſe l' angolo* A = D, *e intorno agli altri due angoli* B, E *ſiano i lati proporzionali* AB · BC :: DE · EF, *e gli altri due angoli* C, F *ſiano ambi retti, o tutti e' due minori, o ambidue maggiori di un retto, ſaranno eſſi triangoli equiangoli.*

FIG. 139.

Se

SE gli angoli *C*, *F* fossero retti, sarebbero uguali, ed ancora essendo l'angolo $A = D$, sarebbe pure l'angolo $B = E$ [a]. Dunque sarebbero essi triangoli equiangoli. Se poi sono ambidue gli angoli acuti, o ambidue ottusi, sarà pure l'angolo *B* uguale all'angolo *E*; altrimenti se fosse uno di essi maggiore dell'altro, per esempio $ABC > DEF$, fattosi $ABG = DEF$, ed essendo ancora l'angolo $A = D$, sarebbe pure $AGB = F$, onde essendo li triangoli *ABG*, *DEF* equiangoli, sarebbe $AB \cdot BG :: DE \cdot EF$ [b], cioè, per l'ipotesi $:: AB \cdot BC$; e però $BG = BC$ [c], e l'angolo $BGC = BCG$ [d], e così ambidue minori di un retto, e però acuti [a]; onde il conseguente *BGA* sarà ottuso, ed essendo questi uguale all'angolo *F*, sarebbe pure l'angolo *F* ottuso, quando l'angolo *C* si è provato acuto, onde non sarebbero ambidue maggiori, o ambidue minori di un retto, contro l'Ipotesi; non è adunque l'angolo *ABC* disuguale all'angolo *E*, onde essi triangoli sono equiangoli, come dovea dimostrarsi.

a 32. I.
b 4. VI.
c 9. V.
d 5. I.

PROPOSIZIONE VIII.

FIG. 140.

Nel triangolo rettangolo BAC, *se dall'angolo retto* A *si conduce la perpendicolare* AD *sopra l'opposta base* BC, *saranno li triangoli* ADB, CDA *simili tra di loro, ed a tutto il triangolo* CAB.

IMperocchè essendo l'angolo retto $ADB = CAB$, e l'angolo *B* comune a questi triangoli, ancora il rimanente *DAB* sarà uguale al residuo *ACB* [a]; dunque sono equiangoli li triangoli *ADB*, *CAB*, e *CDA*, e però sono simili [e]. Il che ec.

e Coroll. pr. 4 VI.

Co-

COROLLARIO I. Quindi è manifesto, che intorno gli angoli retti de' triangoli simili *CDA*, *ADB*, saranno proporzionali i lati *CD* · *DA* :: *AD* · *DB*.

COROLLARIO II. E per la similitudine di ciascuno di essi triangoli con l' intero *CAB*, sarà pure *BC* · *BA* :: *BA* · *BD*, ed ancora *BC* · *CA* :: *CA* · *CD*.

PROPOSIZIONE IX. PROBL.

Da una data retta linea AB *tagliare una parte aliquota* (*per esempio una terza parte*) AG. FIG. 141.

SI tiri dal punto *A* una retta indefinita *AC*, in cui presa qualunque parte *AD*, si replichi in essa secondo il numero della denominazione, che deve avere la parte di *AB* (in questo caso tre volte cioè *AD*, *DE*, *EF*), e congiunto il termine *F* col punto *B*, si tiri la retta *DG* parallela ad *FB*. Sarà *AG* la terza parte di *AB*, come *AD* di *AF*, essendo *AG* · *AB* :: *AD* · *AF* [a].

a 2. VI.

PROPOSIZIONE X. PROBL.

Segare la data retta AB *in* F, G *nell' istessa proporzione, in cui sia divisa un altra* AC *ne' punti* D, E. FIG. 142.

SI congiunga la *BC*, e ad essa parallele siano tirate le *DF*, *EG*; è manifesto, che sarà *AF* · *FG* :: *AD* · *DE*, ed *AG* · *GB* :: *AE* · *EC*, ed *FG* · *GB* :: *DE* · *EC*, ed *AF* · *FB* :: *AD* · *DC* [a]. Dunque è divisa *AB* in *F*, *G* nell' istessa proporzione, in cui *AC* in *D*, *E* era segata.

PRO-

PROPOSIZIONE XI. PROBL.

FIG. 143. *Alle date due rette* AB, BC *trovare la terza proporzionale* BD.

SI ponga *BC* perpendicolare ad *AB*, e congiunta *AC* si compisca l' angolo retto *ACD*, concorrendo la *CD* con l' *AB* prolungata in *D*. Sarà *BD* la terza proporzionale dopo le due *AB*, *BC* [a]. Il che ec.

a Cor. 1. pr. 8: VI.

PROPOSIZIONE XII. PROBL.

FIG. 144. *Date tre linee* DE, EF, DG *trovare la quarta proporzionale* GH.

INclinate in *D* le rette *DE*, *DG*, si ponga *EF* in diritto alla *DE*, e congiunta *EG* si tiri a questa dal punto *F* la parallela *FH* segante *DG* prolungata in *H*. Sarà *GH* la quarta proporzionale ricercata, essendo pure *DE* · *EF* :: *DG* · *GH* [b]. Il che ec.

b 2. VI.

PROPOSIZIONE XIII. PROBL.

FIG. 145. *Date due rette* AE, EB, *trovare la media proporzionale* EF.

POste per diritto *AE*, ed *EB*, e divisa pel mezzo tutta la *AB* in *C*, descrivasi col raggio *CA* un semicircolo, e si alzi la perpendicolare *EF*, segante la circonferenza in *F*: sarà questa *EF* media proporzionale tra le date *AE*, *EB*; perchè congiunte le rette *AF*, *BF*, l' angolo *AFB* è retto [c], dunque essendo *FE* perpendicolare alla base del triangolo rettangolo, stà *AE* · *EF* :: *EF* · *EB* [a]. Il che doveva ritrovarsi.

c 21. III.

PRO-

PROPOSIZIONE XIV.

Se i parallelogrammi ABCD, EBGF *sono uguali, ed hanno un angolo* ABC = GBE, *saranno i lati di essi reciprocamente proporzionali, cioè* AB · BG :: EB · BC; *e viceversa se intorno agli angoli uguali sono i lati reciprocamente proporzionali, essi parallelogrammi saranno uguali.* FIG. 146.

ESsendo posto il lato *BG* per diritto ad *AB*, sarà pure *EB* per diritto a *BC*, perchè siccome *ABC*, così l' uguale *EBG* con l' altro *CBG* fa due angoli retti [a], e prolungate le rette *FG*, *DC* convenienti in *H*, sarà pure *CBGH* un parallelogrammo; e perchè *ABCD* = *BEFG*, sarà *ABCD* · *CBGH* :: *BEFG* · *CBGH* [b]; ma la prima ragione :: *AB* · *BG*, e la seconda :: *EB* · *BC* [c]; dunque *AB* · *BG* :: *EB* · *BC*; e qualunque volta ciò sia, sarà ancora *ABCD* · *CBGH* :: *BEFG* · *CBGH* [c]; dunque sarà *ABCD* = *BEFG* [d]. Il che era da dimostrarsi.

a 14. I. b 7. V. c I. VI. d 9. V.

PROPOSIZIONE XV.

Anche li triangoli uguali ABC, DBE, *in cui l' angolo* B *in ambidue sia uguale, averanno i lati intorno al detto angolo reciprocamente proporzionali, cioè* AB · BE :: BD · BC, *e viceversa, se intorno ad un angolo uguale i lati di due triangoli sono reciprochi, saranno essi triangoli uguali.* FIG. 147.

IMperocchè posta in diritto *BD* a *BC*, riesce pure *BE* per diritto a *BA*, come si è provato ne' parallelogrammi [e], e congiunta *CE*, essendo *ABC* = *DBE*, sarà *ABC* · *CBE* :: *DBE* ·

e 14. VI.

H *CBE*,

CBE [a], dunque *AB* . *BE* :: *BD* . *BC*, essendo queste proporzionali a detti triangoli [b]; e viceversa se *AB* . *BE* :: *BD* . *BC*, sarà pur *ABC* . *CBE* :: *DBE* . *CBE* [b], e però *ABC* = *DBE* [c]. Il che era da dimostrarsi.

a 7. v.
b 1. vi.
c 9. v.

COROLLARIO. Quando ancora l' angolo *DBE* non fosse uguale all' altro *ABC*, ma però con esso compisse due retti, se i lati sono reciprocamente proporzionali, riescono pure uguali i triangoli; imperocchè, essendo *AB* . *BE* :: *BD* . *BC*, posta dall' altra banda la *BF* = *BD*, e congiunta *FE*, sarà pure *AB* . *BE* :: *BF* . *BC*, e permutando [d] *AB* . *BF* :: *BE* . *BC*, dunque congiunte le rette *AE*, *FC* sono parallele [e], e li triangoli *ACF*, *ECF* sono uguali [f], onde aggiunto *FCB*, riesce *ABC* = *EBF*, ma essendo *BF* = *BD*, sarà *EBF* = *EBD* [g], dunque *ABC* = *EBD*; e l' istesso riuscirà ne' parallelogrammi, che intorno ad angoli, i quali insieme facciano due retti abbiano i lati reciprochi, perchè essendo il doppio di detti triangoli, essi pure saranno uguali.

FIG. 148.
d 16. v.
e 2. vi.
f 37. 1.
g 38. 1.

PROPOSIZIONE XVI.

FIG. 149.

Se quattro rette linee sono proporzionali A . B :: C . D, *il rettangolo dell' estreme* AD *uguaglia il rettangolo delle mezzane* BC; *e viceversa se due rettangoli* AD, BC *sono uguali, saranno proporzionali i loro lati reciprocamente presi* A . B :: C . D.

PErchè essendo posti questi lati intorno ad angoli retti, saranno i lati reciprochi *A* . *B* :: *C* . *D*, dunque li rettangoli sono uguali; e se tali rettangoli sono uguali, i loro lati debbono essere re-

reciprocamente proporzionali (per la prop. 14.) Il che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE XVII.

Se tre linee rette A, B, D *sono proporzionali*, A · B :: B · D, *il rettangolo dell' estreme* AD *è uguale al quadrato della mezzana* B; *e viceversa se di tre linee il rettangolo dell' estreme uguaglia il quadrato della mezzana, esse tre linee saranno continuamente proporzionali.* FIG. 150.

SI prenda *C* uguale alla mezzana *B*, dunque essendo *A · B :: B · D*, sarà ancora *A · B :: C ·* D, onde il rettangolo dell' estreme *AD* = *BC* rettangolo delle medie; ma essendo *C* = *B*, il rettangolo *BC* uguaglia il quadrato *BB*, dunque il rettangolo dell' estreme è uguale al quadrato della media; e viceversa se *AD* = *BB*, sarà *AD* = *BC*, onde *A · B :: C · D*, cioè essendo *B* = *C*, saranno continuamente proporzionali *A · B :: B · D*. Il che ec.

PROPOSIZIONE XVIII. PROBL.

Sopra una data retta linea AB *descrivere un rettilineo* ABHG *simile, e similmente posto ad un altro dato* CDFE. FIG. 151.

SI risolva il dato rettilineo *CDFE* in triangoli *CDF*, *CFE*, e sopra la retta *AB* si faccia l' angolo *ABH* = *CDF*, e l' angolo *BAH* = *DCF*; indi l' angolo *AHG* facciasi = *CFE*, e l' angolo *HAG* = *FCE*; sarà il trilineo *ABHG* simile al dato *CDFE*, perchè li triangoli *ABH*, *CDF* saranno equiangoli, dunque intorno all' angolo *B* = *D*, saranno proporziona-

nali i lati $AB \cdot BH :: CD \cdot DF$; ed essendo l'angolo $BHA = DFC$, ed $AHG = CFE$, sarà pure l'angolo $BHG = DFE$; ed essendo $BH \cdot HA :: DF \cdot FC$; ed $HA \cdot HG :: FC \cdot FE$, per l'ugualità ordinata sarà $BH \cdot HG :: DF \cdot FE$; e similmente si proveranno gli altri angoli di questi poligoni uguali, ed i lati, che gli comprendono, essere proporzionali Dunque sopra la data retta AB si è fatto un rettilineo simile al dato. Il che era proposto.

PROPOSIZIONE XIX.

Tav. VIII. FIG. 152.

La proporzione di due triangoli simili è doppia della proporzione de' loro lati omologhi.

Siano due triangoli simili ABC, DEF, ed a due dei loro lati omologhi BC, EF, sia BG terza proporzionale, e si congiunga GA. Perchè BC a BA stava come EF ad ED, sarà permutando $BC \cdot EF :: BA \cdot ED$; ma $BC \cdot EF :: EF \cdot BG$; dunque $BA \cdot ED :: EF \cdot BG$; onde il triangolo $DEF = ABG$ [a], onde il triangolo ABC al triangolo DEF starà come ABC ad ABG, cioè come BC a BG; ma BC a BG ha doppia proporzione di quella, che ha BC ad EF [b]; dunque ABC a DEF ha proporzione doppia di BC ad EF. Il che ec.

a 15. VI.

b Def. 10. V.

COROLLARIO. Se saranno dunque tre linee proporzionali, come BC, EF, BG qualunque triangolo fatto sopra la prima BC ad un simile fatto sopra la seconda EF, sarà come la prima BC alla terza BG.

PRO-

PROPOSIZIONE XX.

Li Poligoni simili ABCDE, FGHIK *si dividono in triangoli simili*, ABC, FGH, *ed* ACD, FHI, *ed* ADE, FIK, *uguali di numero, ed omologhi a' medesimi Poligoni, ed agli altri simili triangoli; e qualunque poligono all' altro simile ha ragione doppia di quella, che ha qualsivoglia lato del primo al lato omologo del secondo.* FIG. 153.

IMperocchè, essendo l' angolo *B* uguale all' angolo *G*, ed i lati proporzionali *AB* · *BC* :: *FG* · *GH*, tirate le rette *AC*, *FH*, i triangoli *ABC*, *FGH* riescono simili [a]. Parimente essendo l' angolo *BCD*=*GHI*, e ne' triangoli simili l' angolo *BCA* =*GHF*, il rimanente *ACD*=*FHI*; e perchè *AC* · *CB* :: *FH* · *HG* ne' triangoli simili, e ne' poligoni simili *BC* · *CD* :: *GH* · *HI*, dunque per l' ugualità ordinata [b] *AC* · *CD* :: *FH* *HI*, e però condotte le rette *AD*, *FI*, saranno pure simili i triangoli *ACD*, *FHI*; e così pure si proveranno simili gli altri triangoli; e perchè in ciascun poligono, condotte le rette da un' angolo a tutti gli altri (fuori che a' due prossimi, dove già si stendono i lati del suddetto angolo) ne riescono tanti triangoli, quanti sono i lati del poligono, detrattine due; però ne' poligoni simili, che hanno il medesimo numero de' lati, riesce un numero uguale di simili triangoli; ed essendo *ABC* ad *FGH* in doppia ragione de' lati omologhi *CB*, *HG* [c], ed ancora *ACD* ad *FHI* in doppia ragione di *CD* ad *HI*, siccome ancora *ADE* ad *FIK* in doppia ragione di *DE* ad *IK*, essendo la medesima ragio-

a 6. vi.

b 22. v.

c 19. vi.

ne *CB · HG* :: *CD · HI* :: *DE · IK*, ancora la doppia dell' una è l'istessa, che la doppia di qualsivoglia di esse; però *ABC · FGH* :: *ACD · FHI* :: *ADE · FIK*, e come uno ad uno, così tutti gli antecedenti a tutti i conseguenti [a], cioè *ABC · FGH* :: *ABC + ACD + ADE · FGH + FHI + FIK*, cioè come un triangolo d'un poligono ad un simile triangolo dell' altro poligono, così tutto il primo poligono a tutto il secondo; onde essendo li triangoli *ABC*, *FGH* in doppia ragione de' lati omologhi *AB*, *FG*; ancora detti poligoni *ABCDE*, *FGHIK* sono in doppia ragione de' lati omologhi *AB*, *FG*. Il che ec.

a 12. v.

COROLLARIO Dunque presa una terza proporzionale a due lati omologhi del primo, e del secondo rettilineo simile, starà il primo rettilineo al secondo, come il lato del primo a quella terza proporzionale presa dopo il primo, ed il secondo lato.

PROPOSIZIONE XXI.

FIG. 154.

I rettilinei ABC, DEI, *simili ad un terzo* HFG, *sono pure simili tra di loro*.

PErchè gli angoli *A*, *B*, *C* essendo uguali a gli angoli *H*, *F*, *G*; e questi essendo pure uguali a gli angoli *DEI*, dunque ancora gli angoli *A*, *B*, *C* sono uguali a' corrispondenti *D*, *E*, *I*; ed essendo *AB · BC* :: *HF · FG*, ed *HF · FG* :: *DE · EI*, dunque *AB · BC* :: *DE · EI* [b]; e così ancora le ragioni di altri due lati del rettilineo *ABC*, e di altri due omologhi del rettilineo *DEI*, saranno uguali; dunque essi rettilinei simili al

b 11. v.

ter-

terzo *HFG*, sono pure simili tra di loro. Il che ec.

PROPOSIZIONE XXII.

Se quattro linee sono proporzionali AB · CD :: EF · GH, *i rettilinei simili, e similmente descritti sopra alle prime due* AIB, CKD, *sono parimente proporzionali ad altri due rettilinei simili* ELMF, GNOH, *descritti sopra all' altre due; e viceversa se quattro rettilinei, sopra a quattro linee similmente descritti, a due a due simili, saranno proporzionali, ancora esse linee debbono essere proporzionali.* FIG. 155.

IMperocchè, essendo la ragione di *AB* a *CD* uguale alla ragione di *EF* a *GH*, la doppia della prima, che è quella del rettilineo *AIB* al suo simile *CKD*, sarà pure uguale alla doppia della seconda, che è quella de' simili rettilinei *ELMF*, *GNOH* [a]; dunque *AIB* · *CKD* :: *ELMF* · *GNOH*; e viceversa, essendo proporzionali questi rettilinei, a due, e due simili, sarà la ragione doppia di *AB* a *CD*, uguale alla doppia di *EF*, a *GH*, che si suppongono i loro lati omologhi; dunque ancora la semplice ragione di *AB* a *CD* è uguale alla semplice ragione di *EF* a *GH*; e però *AB* · *CD* :: *EF* · *GH*. Il che ec.

a 20. VI.

PROPOSIZIONE XXIII.

I parallelogrammi equiangoli ABCD, ECGF *hanno tra loro la ragione composta de' lati, cioè di* BC *a* CG, *e di* DC *a* CE. FIG. 156.

POngasi per diritto *DC* alla *CE*, e riuscirà pure *BC* per diritto alla *CG*, essendo l' angolo

BCD = *ECG*; e compiuto il parallelogrammo *DCGH*, si faccia come *DC* a *CE*, così *CG* ad un altra *K*. Il parallelogrammo *ABCD* all' ugualmente alto *DCGH* è come la base *BC* alla base *CG* [a], ed esso *DCGH* ad *ECGF* è come *DC* a *CE*, o come *CG* a *K*; dunque per l' ugualità ordinata *ABCD* · *ECGF* :: *BC* · *K*; ma *BC* a *K* è in ragione composta di *BC* a *CG*, e di *CG* a *K* [b]; l' ultima di cui *CG* · *K* :: *DC* · *CE*, dunque *ABCD* ad *ECGF* ha la ragione composta de' lati *BC* a *CG*, e *DC* a *CE*. Il che ec.

a 1. VI.

b Avvertimento alla defin. 5. VI.

COROLLARIO. Quindi i parallelogrammi equiangoli sono, come il prodotto de' lati del primo al prodotto de' lati del secondo [b].

PROPOSIZIONE XXIV.

FIG. 157.

In ogni parallelogrammo ABCD, *per qualunque punto* F *del diametro* AC *tirate le parallele a' lati ne risultano intorno al medesimo diametro parallelogrammi* AEFG, CHFK *tra di loro simili, e simili al tutto.*

IMperocchè riescono equiangoli, e però simili tutti i triangoli *AEF*, *ABC*, *FHC*, e gli opposti a questi; dunque *AE* · *EF* :: *AB* · *BC* :: *FH* · *HC*, ed essendo *AG* = *EF*, *AD* = *BC*, *FK* = *HC*, dunque ancora *AE* · *AG* :: *AB* · *AD* :: *FH* · *FK*; dunque tali parallelogrammi sono equiangoli, ed intorno agli angoli uguali hanno i lati proporzionali, e però sono simili al tutto, e fra se stessi. Il che ec.

PRO-

PROPOSIZIONE XXV. PROBL.

Costituire un rettilineo LMNOP, *simile ad un dato* ABCDE, *ed uguale ad un altro dato* F. FIG. 158.

FAcciasi il rettangolo *ABIH* uguale al rettilineo *ABCDE* [a], ed alla retta *BI* si adatti pure il rettangolo *IBGK* = *F* [a], e tra le due *AB*, *BG* si trovi la media proporzionale *LM* [b], sopra di cui si descriva il rettilineo *LMNOP* simile al dato *ABCDE* [c], sarà questo stesso uguale ad *F*; imperocchè *ABIH* . *BIKG* :: *ABCDE* . *F* :: *AB*, . *BG*; ma ancora *ABCDE* . *LMNOP* :: *AB* . *BG* (essendo questa ragione doppia di *AB* alla media *LM*; quale pure è la ragione del rettilineo *ABCDE* al simile *LMNOP* [d]) dunque *LMNOP* = *F*. Il che dovea farsi.

a 45. 1.
b 13. VI.
c 18. VI.
d 20. VI.

PROPOSIZIONE XXVI.

Se nel medesimo angolo A *del parallelogrammo* ABCD *si descrive un simile parallelogrammo* AEHI *similmente posto, sarà d' intorno al diametro* AH, *parte del tutto* AC. FIG. 159.

ALtrimenti se fosse come il parallelogrammo *AEFG*, il cui angolo *F* è fuori del diametro *AC*, sarebbe *AE* . *EF* :: *AB* . *BC* per la similitudine de' parallelogrammi, ma *AB* . *BC* :: *AE* . *EH*, per la similitudine de' triangoli *ABC*, *AEH*; dunque sarebbe *AE* . *EF* :: *AE* . *EH*, onde *EF* = *EH*, il tutto alla parte. Il che è impossibile ec.

PROPOSIZIONE XXVII.

Di tutti li parallelogrammi all' istessa linea AB FIG. 160.

ap-

applicati, con mancanza di parallelogrammi simili, e similmente posti (come AFGK, *ed* AHDC, *applicati alla retta* AB *con mancanza di parallelogrammi* GKBI, DCBE *tra di loro simili) il massimo di tutti è* AHDC *descritto sopra* AC, *che è la metà della data* AB, *e riesce ancora simile al suo difetto d'applicazione* BCDE.

a 26. vi. b 43. I. c 36. I.

IMperocchè essendo intorno al medesimo diametro *DB* li difetti simili *GKBI*, *DCBE* [a], sarà *NGIE* = *MGKC* [b], ed aggiunto di comune *KGIB*, riesce *NKBE* = *MCBI* = *MCAF* [c], ed aggiunto *CMGK*, sarà *AFKG* = *MCBENG*; ma questo è un gnomone minore di *DCBE*, e conseguentemente ancora minore di *AHDC*; dunque *AHDC* è il massimo di tutti. Il che ec.

d 2. 6.

COROLLARIO. Quindi de' parallelogrammi inscritti in un triangolo *ABL*, co' lati paralleli a' lati di esso triangolo, il massimo è *AHDC*, il quale divide pel mezzo tutti i lati *BL*, *AL*, *AB* di esso triangolo [d], siccome *AC* è la metà di *AB*.

PROPOSIZIONE XXVIII. PROBL.

FIG. 161. e 27. vi.

Ad una data retta linea AB *adattare un parallelogrammo* AZPS *uguale ad un dato rettilineo* C, *mancante però nell' applicazione del parallelogrammo* ZPRB *simile ad un dato parallelogrammo* D. *Non deve però il dato rettilineo* C *essere maggiore* [e] *del' parallelogrammo, che si potrebbe applicare alla metà della data linea* AB, *con mancanza d'applicazione parimente simile a* D.

DIvisa pel mezzo *AB* in *E*, si descriva sopra *AE* il parallelogrammo *AEFH* simile al dato

to D [a], il quale se fosse uguale al dato rettilineo C, sarebbe applicato alla data AB, col mancamento dell'altro a se uguale, e simile $EFGB$; ma essendo $AEFH$ maggiore di C, si faccia il parallelogrammo $KNMT$ simile pure a D, ed uguale all'eccesso del medesimo $AEFH$ sopra C [b]; e prese le rette $FQ = KT$, ed $FO = KN$, si compisca il parallelogrammo $FOPQ$, che sarà uguale a $KNMT$, e simile ad $EFGB$, e però intorno all'istesso diametro FB [c]; e prolungate QP in Z, ed OP alle rette AH, BG in S, R, dico, che il parallelogrammo $AZPS$ sarà $= C$, ed applicato alla retta AB, colla mancanza del parallegrammo $PZBR$ simile a D. Imperocchè essendo $FQPO = KTMN = HFEA - C$, ovvero ad $EFGB - C$, sarà il gnomone $QPOEBG = C$; ma essendo $QPRG = OPZE$ [d], aggiunto ZR, sarà $QZBG = OEBR = SOEA$, e di nuovo aggiunto $OPZE$, sarà esso gnomone $QPOEBG = AZPS$, e però questo pure $= C$, ed applicato alla data AB, col mancamento $ZPRB$ simile a D. Il che ec.

a 18. VI.

b 25. VI.

c 26. VI.

d 43. I.

PROPOSIZIONE XXIX. PROBL.

Alla data retta linea AB *applicare un parallelogrammo* ARNP *uguale ad un dato rettilineo* C, *ed eccedente nella sua applicazione col parallelogrammo* BONP *simile al dato* D.

FIG. 162.

SI seghi AB pel mezzo in E, e sopra EB fatto il parallelogrammo $EFGB$ simile al dato D, si faccia simile al medesimo un parallelogrammo $HIKS$ uguale alla somma di $EFGB$, e del dato

a 25. VI. to rettilineo *C* [a]. Indi prodotti i lati *FE*, *FG*, si tagli $FL = IH$, ed $FM = IK$, e si compisca il parallelogrammo *FLNM*, che sarà $= HIKS$, e simile ad esso, ed all' altro *EFGB*, essendo ambidue simili a *D*, onde saranno intorno al medesimo diametro *FBN* [b]; ed essendo il gnomone *ELNMGB* l' eccesso del parallelogrammo *FLNM* sopra *EFGB*, sarà quel gnomone $= C$; ma essendo $GMPB = EBOL$, e questo $= EARL$, essendo la base $EB = EA$, sarà $GMPB = EARL$, ed aggiunto *ELNP*, il gnomone $ELNMGB = ARNP$, dunque questo parallelogrammo applicato alla data *AB*, ed eccedente del parallelogrammo *BONP* simile a *D*, è uguale al dato rettilineo *C*. Il che ec.

b 26. VI.

AVVERTIMENTO.

Alcuni Matematici, come il P. de Chales nel suo Corso Matematico, ed il P. Jacquet ne' suoi elementi di Geometria, e M. Ozanam negli Elementi d' Euclide tralasciano queste ultime tre proposizioni, asserendo, che nullius ferè sunt usus, *e che sono* de petite consequence. *Io però osservo, essere la proposizione 27. molto utile alla questione* de maximis, & minimis, *e le altre due proposizioni 28. e 29. essere adattate alla soluzione di qualunque Problema piano, come vedrassi nell' Algebra, che sempre si riduce all' equazione, in cui un dato piano si uguaglia alla somma, o alla differenza di un rettangolo compreso da una linea data, e dalla ignota, che ricercasi, ed al quadrato di questa ignota; la quale somma importa il parallelogrammo rettangolo applicato ad una data linea, coll' eccesso di un parallelogrammo simi-*

le

le ad un quadrato: e la differenza di essi trovasi pure, applicando alla data linea il parallelogrammo, con mancanza di un parallelogrammo simile ad un quadrato; le quali cose possono eseguirsi, come in queste proposizioni ultime si è insegnato; e però non parmi doversi ammettere, che non siano di verun uso, e di piccola conseguenza, *come dagli Autori citati si crede.*

PROPOSIZIONE XXX. PROBL.

Dividere la data retta AB *in* C *nell' estrema, e media ragione.* FIG. 163.

DIvidasi in maniera, che il rettangolo *ABC* sia uguale al quadrato della rimanente *AC* [a]; sarà dunque tutta la *AB* alla parte *AC*, come la medesima *AC* alla residua *CB* [b]; dunque tutta la *AB* resterà divisa in *C* secondo l' estrema, e media ragione [c]. Il che ec.

a 11. II.
b 17. VI.
c *Def.* 3. VI.

PROPOSIZIONE XXXI.

Nel triangolo rettangolo BAC *le figure simili* F, G *fatte sopra i lati* BA, CA *contenenti l' angolo retto* A *sono uguali alla figura* E *simile a ciascuna di esse, descritta sopra il lato* BC *sotteso all' angolo retto.* FIG. 164.

COndotta dall' angolo retto la perpendicolare *AD* sopra la base *BC*, saranno proporzionali le rette *CB*, *CA*, *CD* [d], ed ancora le tre altre *CB*, *BA*, *BD*; dunque la figura *E* alla simile *G*, sta come *BC* a *CD* [e], e convertendo *G* . *E* :: *CD* . *BC*; ma similmente *F* . *E* :: *BD* . *BC*; dunque

d *Coroll. Pr.* 8. VI.
e *Coroll. Pr.* 20. VI.

G+*F*

a 24. v. $G + F \cdot E :: CD + BD \cdot BC^2$; ma $CD + BD = BC$; dunque ancora $G + F = E$. Il che dovea dimostrarsi.

NOTA. *Essendo tutti li quadrati figure simili, e tutte le simili figure in duplicata proporzione de' lati omologhi, perciò le simili figure sono come i quadrati de' lati corrispondenti, e perciò solo resta dimostrato, che le figure simili fatte sopra li due lati contenenti l'angolo retto, debbono essere uguali alla figura loro simile, fatta sopra la base di esso triangolo rettangolo: siccome li due quadrati fatti da i lati sono uguali al quadrato sopra la base*

b 47. I. *opposta all' angolo retto*[b].

E perchè ancora li semicircoli sono figure simili

FIG. 165. *(siccome qualsivoglia altro segmento circolare è simile ad un segmento, che comprende un angolo u-*

c Def. 9. III. *guale a quello, che si comprende in esso*[c]) *perciò se nel semicircolo* BEC *si descriverà il triangolo* BAC,

d 31. III. *che sarà rettangolo in* A[d], *e sopra agli altri lati* AB, AC *si descriveranno li mezzi cerchi* BGA, CFA, *saranno questi due presi insieme uguali all' altro* BEC; *onde tolti di comune li segmenti* BEA, AHC, *rimangono le lunette* BGAEB + CFAHC *uguali al triangolo* BAC. *E se il punto* A *è preso nel mezzo dell' arco* BAC, *esse lunette dall' una, e dall' altra parte essendo tra di loro uguali, ciascuna di esse sarà uguale alla metà del triangolo* BAC, *come fu proposto da Ippocrate Chio.*

PROPOSIZIONE XXXII.

FIG. 166. *Se due triangoli* ABC, DCE *hanno due lati proporzionali, cioè* AB · AC :: DC · DE; *e concorrendo nel punto* C *l' uno, e l' altro triangolo,*

rie-

riescano que' lati omologhi paralleli, saranno gli altri lati BC, CE *posti per diritto fra loro in una medesima retta linea.*

IMperocchè il parallelismo de' lati omologhi fa l' angolo A, e l' angolo D uguali al terzo alterno ACD; dunque sono essi angoli A, D uguali, ed avendo i lati proporzionali, gli altri angoli pure saranno uguali [a]; dunque l' angolo $B = DCE$, ed essendo l' angolo $A = ACD$, dunque $B + A = ECA$, ed aggiunto l' angolo ACB sono i tre angoli del triangolo ABC uguali agli angoli $ECA + ACB$; e però questi sono pure uguali a due retti, onde fanno una retta linea BCE. Il che ec.

a 6. VI.

PROPOSIZIONE XXXIII.

FIG. 167.

Ne' cerchj uguali ABI, EFP, *gli angoli fatti al centro* BDC, FHG; *ed ancora quelli fatti alla circonferenza* BAC, FEG, *sono proporzionali agli archi* BC, FG, *cui insistono; ed ancora gli settori* BDC, FHG *sono come i detti archi, o come gli angoli da loro compresi al centro.*

REplicato l' arco BC, in CI, e l' arco FG in GK, e KP, quanto moltiplice è l' arco BCI dell' arco BC, tanto moltiplice sarà l' angolo BDI dell' angolo BDC, essendo gli angoli BDC, CDI uguali, come corrispondono ad archi uguali [b]; e similmente quanto moltiplice è l' arco FP di FG, tanto moltiplice è l' angolo FHP dell' angolo FHG, mentre agli archi uguali FG, GK, KP corrispondono altrettanti angoli uguali FHG, GHK, KHP. E se l' arco BI fosse uguale all' arco FP, sarebbe l' angolo $BDI = FHP$; se $BI >$, o $<$ FP,

b 27. III.

FP, farà parimente $BDI >$, o $< FHP$; dunque $BC \cdot FG :: BDC \cdot FHG$, mentre gli ugualmente moltiplici degli antecedenti si accordano in uguagliare, superare, o mancare dagli ugualmente moltiplici de' conseguenti. Il che primieramente si dovea dimostrare.

In oltre, perchè gli angoli alla circonferenza BAC, FEG sono la metà di quelli al centro BDC, FHG [a], perciò ancora essi essendo proporzionali a questi angoli fatti al centro, saranno pure come gli archi BC, FG, sopra di cui insistono.

a 20. III.

E perchè ancora tirate le corde BC, CI sono uguali tra loro, e similmente sono uguali le corde FG, GK, KP [b], ed i segmenti, cui le corde uguali sono sottese, tra di loro pure sono uguali [c], siccome ancora uguali sono i triangoli, che hanno le basi uguali, ed i lati uguali; ne segue, che il settore $CDI = BDC$, ed il settore $FHG = GHK = KHP$, onde quanto moltiplice è l'arco BI dell'arco BC, tanto è moltiplice il settore BDI del settore BDC; e similmente quanto moltiplice è l'arco FP dell'arco FG, tanto è moltiplice il settore FHP del settore FHG; che se l'arco $BCI = >$, o $<$ dell'arco $FGKP$, sarà pure il settore $BDI =, >$, o $<$ del settore FHP; dunque il settore BDC al settore FHG è come l'arco BC all'arco FG, o come l'angolo BDC all'angolo FHG. Il che dovea dimostrarsi.

b 29. III.

c 24. III.

AVVERTIMENTO.

Si tralasciano i libri VII. VIII. IX. *e* X. *delli Elementi di Geometria d' Euclide, perchè di essi li primi tre parlano de' numeri, le cui proprietà apparten-*

tengono all' Aritmetica, e l' altro discorre delle linee incommensurabili, cioè, che non hanno tra di loro veruna misura comune, le quali più brevemente, e più chiaramente potrebbero osservarsi col calcolo dell' Analitica. Per ora basta avvertire, che le quantità commensurabili, avendo qualche misura comune, che può prendersi per unità, sono proporzionali a' numeri, i quali sempre si misurano dall' unità, compresa alquante volte in uno, e certe altre volte in qualunque altro numero; ma le quantità continue possono essere incommensurabili, essendo proporzionali non a' numeri, ma alle radici quadrate, cubiche, biquadratice ec. di numeri non quadrati, ne cubi, ne biquadrati ec.

Così il diametro d' un quadrato è incommensurabile al lato di esso, a cui sta, come la radice quadra di 2., ad 1. La perpendicolare d' un triangolo equilatero sta al lato di esso, come la radice quadra di 3. a 2. le quali sono radici irrazionali, però queste si dicono incommensurabili in lunghezza, non in potenza. Che se tra due linee, le quali siano tra di loro, come l' unità ad un numero non quadrato, ne cubico, per esempio come 1 a 7. si prendano due linee medie proporzionali, saranno queste $\sqrt[3]{7}$, e $\sqrt[3]{49}$; cioè come la radice cubica di 7, e come la radice cubica di 49. le quali paragonate alle date due linee, che erano, come 1. a 7., riescono incommensurabili ad esse, non solo in lunghezza, ma ancora in potenza quadrata; e prese tra esse più medie proporzionali, possono essere incommensurabili ancora in potenza cubica, ed in altre di grado maggiore.

Però essendo più necessario di tali osservazioni l' esame delle figure solide, di cui tratta Euclide nel

libro XI. *e* XII. *de' suoi Elementi, perciò dopo il sesto libro si fa passaggio all' undecimo, come da altri Matematici si è stimato opportuno di fare.*

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
DI EUCLIDE.
LIBRO XI.

⁂

DEFINIZIONI.

I. CHiamasi CORPO SOLIDO quello, che ha l' estensione in lunghezza, in larghezza, ed in grossezza.

II. LI TERMINI di qualunque solido, sono le superficie, da' quali è compreso.

Tav. IX. FIG. 168. III. Una LINEA RETTA *AB* dicesi PERPENDICOLARE AL PIANO *FCE*, quando con tutte le linee *BF*, *BD*, *BC*, *BE*, tirate dal suo termine *B* in detto piano, faccia gli angoli retti *ABF*, *ABD*, *ABC*, *ABE*.

IV. Il PIANO *HIE* dirassi PERPENDICOLARE AL PIANO *FCE*, se qualunque retta *AB*, condotta in uno di essi piani perpendicolare alla comune sezione *GE* di ambidue i piani, riesca pure all' altro piano *FCE* perpendicolare.

FIG. 169. V. L' INCLINAZIONE DELLA RETTA *AD* AL PIANO *FCE*,

FCE, è l' angolo *ADB*, che risulta, se da un punto sublime *A* di essa linea, tirata la perpendicolare *AB* sopra esso piano, si tirerà nel medesimo piano la retta *DB*, che congiunge i termini d' ambidue queste linee.

VI. L'Inclinazione del piano *GFCH* al piano *FCE* è l'angolo acuto *ADB*, compreso da due rette linee *DA*, *DB*, tirate dal medesimo punto *D* della comune sezione *FC* di ambi i piani, in ciascuno di essi, perpendicolare all' istessa sezione, di maniera che siano retti gli angoli *ADC*, e *BDC*. FIG. 170.

VII. Due piani si diranno Ugualmente, o Similmente inclinati, come due altri piani, quando l' angolo dell' inclinazione de' due primi sarà uguale all' angolo dell' inclinazione degli altri.

VIII. Piani tra di loro Paralleli sono quelli, che in infinito continuati, mai converrebbero insieme.

IX. Le Figure Solide Simili, sono quelle, che da piani simili, uguali di numero, e con uguale ordine disposti sono contenute.

X. Uguali, e Simili saranno quelle figure solide, che da simili, ed uguali piani, nell' istesso numero, e col medesimo ordine saranno comprese.

XI. Angolo Solido è l'inclinazione di più di due linee, non poste nel medesimo piano, e concorrenti in un medesimo punto: o pure è il concorso di più di due angoli piani, non posti nel piano medesimo, e terminati in un solo punto.

XII. La Piramide è una figura solida compresa da più piani convenienti in un punto, e dal pia-

no opposto a tale punto, in cui convengono li detti piani.

XIII. Il PRISMA è una figura solida compresa da due piani paralleli, simili, ed uguali, e similmente posti, e da altri piani parallelogrammi, compresi e da' lati de' piani opposti, e dalle linee, che ne connettono gli angoli dell' uno, e dell' altro.

XIV. La SFERA è una figura solida, nata dalla rivoluzione d' un semicircolo intorno al suo diametro tenuto fisso, finchè ritorni al medesimo sito, d'onde cominciò a muoversi.

XV. Esso diametro fisso dicesi l' ASSE della sfera.

XVI. Il CENTRO della sfera è quel medesimo punto, che serviva di centro al semicircolo genitore.

XVII. Il DIAMETRO di essa sfera è qualunque linea retta, che passa pe'l centro, e termina dall' una, e dall' altra parte, alla superficie sferica.

XVIII. Il CONO si descrive dalla rivoluzione di un triangolo rettangolo intorno ad uno de' lati contenenti l' angolo retto, il quale rimanga fermo, finchè girando la figura triangolare, ritorni al medesimo sito, d' onde cominciò a muoversi. E se il lato fisso è uguale all' altro intorno all' angolo retto, dirassi il Cono ORTOGONIO, cioè RETTANGOLO: se è minore quello di questo, dirassi AMBLIGONIO, cioè OTTUSIANGOLO: e se maggiore, dirassi OXIGONIO, cioè ACUZIANGOLO.

XIX. Quel lato fisso, intorno a cui gira il Triangolo, si dirà ASSE del Cono, generato da esso.

XX. Il cerchio descritto dal lato, che gira, si dice BASE di esso Cono.

XXI.

XXI. Stando fermo un lato di qualche rettangolo, rivolto intorno ad esso, fino che ritorni al primiero sito, la figura da ciò descritta si dice CILINDRO.

XXII. L' ASSE del Cilindro è quella linea fissa, intorno a cui girando il rettangolo, la descrive.

XXIII. I cerchj descritti dagli altri due lati opposti di esso rettangolo, sono le BASI di esso Cilindro.

XXIV. I Coni, ed i Cilindri SIMILI sono quelli, che hanno gli assi, ed i diametri delle basi, tra di loro proporzionali, come descritti da triangoli, o rettangoli simili, e similmente mossi.

XXV. Il CUBO è una figura solida, contenuta da sei quadrati uguali.

XXVI. Il TETRAEDRO, che è una Piramide regolare, è una figura solida contenuta da quattro triangoli uguali, ed equilateri.

XXVII. L' OTTAEDRO è una figura solida compresa da otto triangoli uguali, ed equilateri.

XXVIII. Il DODECAEDRO è una figura solida contenuta da dodici Pentagoni uguali, ed equilateri, ed equiangoli.

XXIX. L' ICOSAEDRO è una figura solida, compresa da venti triangoli uguali, ed equilateri.

XXX. Il PARALLELEPIPEDO è la figura solida, contenuta da sei parallelogrammi, di cui gli opposti sono paralleli, ed uguali.

PROPOSIZIONE I.

Di una linea retta non può essere una parte BD *in un piano* ECF, *ed un altra parte di essa* DA *sollevata dal medesimo piano.* FIG. 171.

ALtrimenti, prolungata la *BD* in *G* nell' istesso piano, converrebbero due rette linee *GB*, *AB* in una porzione comune *DB*; il che è impossibile [a]; dunque della linea retta non è parte nel soggetto piano, e parte in un altro elevato da esso. Il che ec.

a *Assiom.* 10. *lib.* 1.

PROPOSIZIONE II.

FIG. 172. *Se due linee rette* AB, CD *si segano in* E, *stanno in un medesimo piano, ancora qualunque triangolo* DEB, *consiste in un piano stesso.*

IMperocchè, se la parte *EFG* del triangolo fosse in un piano, ed il resto *FDBG* in un altro, della retta *ED* la parte *EF* sarebbe in un piano, e l' altra parte *FD* fuori di esso sarebbe sollevata, il che è impossibile [b]; dunque il triangolo *DEB* è in un istesso piano, e così ancora le rette *ED*, *EB* sono in esso, nè le porzioni loro *CE*, *AE* possono essere sollevate dal medesimo piano; e però le rette *AB*, *CD*, che si segano, stanno in un medesimo piano. Il che ec.

b 1. XI.

PROPOSIZIONE III.

FIG. 173. *Se due piani* ABG, ECF *si segano, la loro comune sezione* HD *è una linea retta.*

ALtrimenti si potrà tirare nel piano *ABG* la retta *HKD*, e nell' altro *ECF* la retta *HID*, le quali due rette linee comprenderebbero uno spazio, il che è impossibile [c]; dunque la comune sezione è la retta linea *HD*. Il che ec.

c *Ass.* 9. 1.

PRO-

PROPOSIZIONE IV.

Se la retta AB *è perpendicolare a due linee rette* CD, EF, *che si segano in* B, *sarà ancora perpendicolare al piano, che passa per dette linee.* FIG. 174.

SI tiri per l'istesso punto *B* un altra linea *GBH*, e poste *BC* = *BD*, e *BF* = *BE*, si congiungano le rette *CE*, *FD*, seganti la retta *GH* in *G*, ed *H*; indi da un punto sublime *A* della retta *AB*, si tirino le rette *AC*, *AE*, *AF*, *AD*, *AG*, *AH*. Ne' triangoli *CBE*, *DBF*, essendo intorno l'angolo uguale alla cima *B*, ancora i lati *CB*, *BE* uguali a' lati *DB*, *BF*, sarà la base *CE* = alla base *DF*, e gli altri angoli uguali; e però ne' triangoli *CBG*, *DBH*, essendo l'angolo *BCG* = *BDH*, e l'angolo *CBG* = *DBH*; ed il lato *CB* = *BD*, sarà ancora il lato *CG* = *DH*, e l'altro *BG* = *BH* [a]. Similmente ne' triangoli *CAB*, *DAB*, essendo *CB* = *BD*, ed il lato *AB* comune, e gli angoli retti in *B* uguali, sarà la base *AC* = *AD*; e con simil ragione si proverà ne' triangoli *ABE*, *ABF*, essere *AE* = *AF*. Dunque ne' triangoli *ACE*, *ADF*, essendo ciascun lato dell' uno, uguale a ciascun lato dell' altro, saranno ancora gli angoli corrispondenti *ACE*, *ADF* uguali [b], onde ne' triangoli *ACG*, *ADH* vi sono i lati *AC*, *AD*, ed i lati *CG*, *DH* uguali, intorno a detti angoli uguali *ACG*, *ADH*, e però la base *AG* = *AH*; e finalmente ne' triangoli *AGB*, *AHB* essendo tutti i lati dell' uno, uguali a tutti i lati dell' altro, cioè *BG* = *BH*, ed *AB* comune, ed *AG* = *AH*, dunque l'angolo *ABG* = *ABH* [b], i quali però sono retti; onde la li-

a 26. 1.

b 8. 1.

linea *AB* con tutte le linee condotte per lo punto *B* nel piano, che passa per le rette *CD*, *EF*, facendo angoli retti, è perpendicolare a detto piano [a]. Il che era da dimostrarsi.

a Def. 3. XI.

PROPOSIZIONE V.

FIG. 175.

Se la retta AB *è perpendicolare a tre linee rette* BC, BD, BE, *queste tre linee saranno in un medesimo piano.*

ALtrimenti il piano, che passa per le due *BC*, *BD* segherebbe il piano condotto per le due *AB*, *BE*, in un altra retta linea *BF*, comune sezione di entrambi; onde la retta *AB*, che è perpendicolare alle due *BC*, *BD*, farebbe angolo retto ancora colla *BF* esistente nell' istesso piano *CBD* [b]; dunque nel piano *ABF* sarebbe l'angolo retto *EBA* uguale al retto *FBA*, la parte al tutto; il che è impossibile; dunque la *BE* era nell' istesso piano dell'altre due *BC*, *BD*, e non sollevata da esso. Il che ec.

b 4. XI.

PROPOSIZIONE VI.

FIG. 176.

Se le due rette linee AB, CD *sono perpendicolari al piano* BED, *saranno fra di loro parallele.*

COngiungasi la *BD*, e ad angolo retto *BDE* si tiri nell' istesso piano la *DE* $=$ *AB*, e si congiungano le rette *BE*, *EA*, *AD*. Essendo intorno agli angoli retti *ABD*, *BDE* il lato *AB* $=$ *ED*, ed il lato *BD* comune, sarà la base *AD* $=$ *BE*; dunque ne' triangoli *ADE*, *ABE* essendo *AD* $=$ *EB*, *DE* $=$ *BA*, e la base *AE* comune, l'angolo *ADE* $=$ *ABE*, cioè retto; onde la *ED* facendo

cendo angolo retto colle tre linee *BD*, *AD*, *CD*; però queste sono in un medesimo piano, [a]; ma nel piano delle due *BD*, *AD* è ancora la *AB*, che fa con esse un triangolo [b]; dunque le due rette *AB*, *CD* sono in un medesimo piano, ed essendo li due angoli interni *ABD*, *CDB* retti, esse linee sono parallele. Il che ec.

a 5. xi.
b 2. xi.

PROPOSIZIONE VII.

La retta AC, *che congiunge due punti* A, C *di due linee parallele* AB, CD, *è nel medesimo piano di esse.* FIG. 177.

PErchè se si sollevasse in un altro piano, come *AEC*, questo continuato segherebbe il piano delle parallele nella retta *AC* [c], dunque due rette linee *AEC*, ed *AC* comprenderebbero spazio, il che è impossibile [d].

c 3. xi.
d *Ass.* 9. 1.

PROPOSIZIONE VIII.

Essendo le due rette AB, CD *parallele, se una di esse* AB *è perpendicolare al piano* BED, *ancora l' altra* CD *gli sarà perpendicolare.* FIG. 176.

SI faccia la costruzione, come nella *proposizione* 6. e con l' istessa dimostrazione si proverà essere angoli retti *EDA*, *EDB*, onde la *ED* è perpendicolare al piano di esse parallele, onde ancora è retto l' angolo *CDE*; ma ancora l' angolo *CDB* è retto, essendo l' angolo *ABD*, dell' altra parallela, pur retto; dunque ancora la *CD* è perpendicolare allo stesso piano. Il che ec.

PRO-

PROPOSIZIONE IX.

FIG. 178.

Se le linee rette A B , C D *sono parallele ad una terza* E F *posta fuori del loro piano, saranno pur esse tra di loro parallele.*

PIglisi nella retta *EF* un punto *G*, da cui nel piano delle due parallele *AB*, *BF* si tiri la perpendicolare *GH*, e nel piano delle parallele *EF*, *CD* la perpendicolare *GI*; dunque essendo gli angoli *EGH*, *EGI* retti, è la *EG* perpendicolare al piano *HGI*; dunque ancora le *AB*, e *CD* parallele alla *EG*, sono all' istesso piano perpendicolari [a], e però sono tra di loro parallele [b]. Il che era da dimostrarsi.

a 8. XI.
b 6. XI.

PROPOSIZIONE X.

FIG. 179.

Se due rette A B , C B *concorrenti in* B *sono parallele a due altre* D E , F E *convenienti in* E *fuori del medesimo piano* A B C, *saranno gli angoli* A B C, D E F *tra loro uguali.*

POngasi *ED* = *BA*, ed *EF* = *BC*; congiunte le rette *AD*, *BE*, *CF* saranno uguali, e parallele [c]; dunque ancora congiunte le due *AC*, *DF* riescono uguali; onde tutti i lati del triangolo *ABC* uguagliando i lati dell' altro *DEF*, sarà l' angolo *ABC* = *DEF*. Il che ec.

c 33. I.

PROPOSIZIONE XI. PROBL.

FIG. 180.

Da un punto sublime A *tirare la retta* A B *perpendicolare al soggetto piano.*

Si

SI tiri in esso piano qualunque retta *GD*, a cui dal punto *A* si mandi la perpendicolare *AC*, ed all' istessa *GD* si alzi dal punto *C* la perpendicolare *CB* nel medesimo piano; indi sopra la *CB* dal punto *A* tirando la perpendicolare *AB*, sarà questa perpendicolare al soggetto piano; imperocchè tirata per *B* la *FBE* parallela a *GD*, siccome *GC*, facendo l'angolo retto colla *CA*, e colla *CB*, è perpendicolare al piano *ACB*, così ancora la *FB* sarà perpendicolare al medesimo piano [a], dunque l'angolo *ABF*, e l'angolo *ABC* sono retti, e però la *AB* è perpendicolare al soggetto piano. Il che ec.

a 8. XI.

PROPOSIZIONE XII. PROBL.

FIG. 181.

Dal punto C *posto nel piano* EFG *alzare la* CD *perpendicolare a detto piano.*

DA qualunque sublime punto *A* si tiri al piano la perpendicolare *AB* [b], e congiunta la *BC*, si tiri nel piano *ABC* la *CD* parallela ad *AB*; questa sarà pure perpendicolare al piano [c]. Il che ec.

b 11. XI.

c 8. XI.

PROPOSIZIONE XIII.

FIG. 182.

Dal medesimo punto B *non possono essere alzate al piano* EFG *due perpendicolari* BA, BC *verso la medesima parte.*

PErchè il piano, che passa per le due *AB*, *CB* segando il piano soggetto *EFG* nella retta *BD*, sarebbero uguali gli angoli retti *ABD*, *CBD*, cioè la parte al tutto; il che è impossibile; dunque ec.

PRO-

PROPOSIZIONE XIV.

FIG. 183. *Se la retta* AB *è perpendicolare a due piani* CD, EF, *questi saranno paralleli.*

IMperocchè se prolungati convenissero in una retta linea *HG*, preso in essa un punto *I*, e condotte in ambi i piani le rette *IA*, *IB*, si farebbe un triangolo, in cui due angoli *BAI*, *ABI* sarebbero due retti; il che è impossibile [a]; dunque essi piani sono paralleli.

a 17. I.

PROPOSIZIONE XV.

FIG. 184. *Se due rette linee* AG, AD *congiunte in* A *sono parallele a due linee* EF, EC *poste in un altro piano, li due piani* DAG, CEF *saranno paralleli.*

COnducasi dal punto *A* sopra al piano *CEF* la perpendicolare *AB*, e si tirino in esso piano le *BI*, *BH* rette linee parallele alle *EF*, *EC*, e conseguentemente saranno parallele alle *AG*, *AD* [b], dunque essendo retti gli angoli *ABI*, *ABH*, saranno pure gli angoli *BAG*, *BAD* retti, e però la *AB* sarà perpendicolare ancora al piano *DAG*; dunque sono questi due piani paralleli [c]. Il che ec.

b 9. XI.

c 14. XI.

PROPOSIZIONE XVI.

FIG. 185. *Se due piani paralleli* AB, CD *sono segati da un altro piano* HEGF, *i loro comuni segamenti* EH, GF *sono due rette parallele.*

IMperocchè, se prolungate convenissero in *I*, sarebbero parte ne' piani paralleli, e parte fuo-

ri

ri di essi (perchè ivi non convengono i piani equidistanti) il che è impossibile [a]; Dunque tali comuni sezioni sono parallele.

[a] 1. XI.

PROPOSIZIONE XVII.

Se due rette AEB, CFD *sono segate da piani paralleli* HI, KL, MN, *saranno da essi tagliate proporzionalmente.*

FIG. 186.

SI tiri nel piano *HI* la retta *AC*, nel piano *MN* la *BD*, e congiunta la *CB* seghi il piano *KL* in *G*, indi si tirino in esso le rette *GE*, *GF*. Il piano del triangolo *ACB* ha li comuni segamenti de' piani paralleli *AC*, *EG* tra loro paralleli [b], e similmente il triangolo *CBD* fa le sezioni *GF*, *BD* parallele; dunque *AE* · *EB* :: *CG* · *GB* [c] :: *CF* · *FD*, onde sono proporzionalmente segate le rette *AB*, *CD* da essi piani paralleli. Il che ec.

[b] 16. XI.
[c] 2. VI.

PROPOSIZIONE XVIII.

Se la retta AB *è perpendicolare al piano* CD, *qualunque piano* EF, *che passi per essa linea, sarà perpendicolare al piano soggetto.*

FIG. 187.

SIa la *EG* la comune sezione di detti piani, e da qualunque punto *H* di essa si tiri nel piano *EF* la *HI* parallela ad *AB*. Sarà questa pure al piano *CD* perpendicolare [d], dunque esso piano *EF* sarà perpendicolare al piano *CD* [e]. Il che ec.

[d] 8. XI.
[e] Def. 4. XI.

PROPOSIZIONE XIX.

FIG. 188.

Se due piani CGD, EHF *perpendicolari al soggetto piano* GKH *si seghino nella retta* AB, *sarà questa perpendicolare al soggetto piano.*

Im-

IMperocchè essa *AB* sarà perpendicolare alle due comuni sezioni *EH*, *GD* di essi piani *EF*, *CD*, col piano soggetto *EK*; altrimenti, se nel piano *EF* fosse *BL* perpendicolare ad *EH*, e nell' altro *CD* fosse *BI* perpendicolare a *GD*, sarebbero esse *BL*, *BI* perpendicolari al piano *EK* [a], il che si è dimostrato impossibile [b], dunque la comune sezione *AB* è perpendicolare al soggetto piano *EK*.

a *Def.* 4. XI.
b 13. XI.

PROPOSIZIONE XX.

FIG. 189.

Se l'angolo solido ABDC *è contenuto da tre angoli piani* BAD, BAC, DAC, *due di essi saranno maggiori del rimanente.*

QUando fossero tutti e' tre uguali, è manifesto, essere due maggiori del terzo; ma se sono disuguali, sia *BAC* il massimo, da cui si levi l' angolo *BAE* = *BAD* e tirata la retta *BEC*, posta *AD* = *AE*, si congiungano *BD*, *CD*: essendo ne' triangoli *BAE*, *BAD*, intorno agli angoli uguali in *A*, il lato *AB* comune, ed *AE* = *AD*, sarà ancora la base *BE* = *BD*; ma *BD* + *DC* è maggiore di *BC*, dunque *DC* è maggiore di *EC*; onde ne' triangoli *EAC*, *DAC*, essendo il lato *AC* comune, ed *AE* = *AD*, ma la base *EC* minore della *DC*, sarà l' angolo *EAC* minore dell' altro *DAC* [c], e però essendo *BAE* = *BAD*, sono li due *BAD*, *DAC* maggiori del massimo *BAC*. Il che ec.

c 25. I.

PROPOSIZIONE XXI.

TAV. X. FIG. 190.

Qualunque angolo solido A, *composto di quanti si voglia angoli piani* BAC, CAD, DAE, EAF, FAG,

FAG, GAB, *averà sempre la somma di detti angoli minore di quattro retti.*

SI tagli con un piano *BCDEFG*, che sarà la base della piramide, opposta alla cima dell' angolo *A*, e preso in essa base qualunque punto *I*, si congiungano le rette *IB*, *IC*, *ID*, *IE*, *IF*, *IG*. Essendo tanti i triangoli, che da' lati della base si alzano alla cima *A* della piramide, che i triangoli da' medesimi lati convergenti al punto *I* preso dentro la base, dunque tutti gli angoli, che sono in quelli, uguagliano tutti gli angoli di questi, i quali comprendono tutti gli angoli del poligono di essa base, insieme con i quattro retti, che sono intorno al punto *I*; ma essendo gli angoli *BCA*, ed *ACD* maggiori di *BCD* [a], e così li due *CDA*, *ADE* maggiori di *CDE* ec. sono tutti gli angoli adiacenti a' lati del poligono ne' triangoli esterni diretti ad *A*, maggiori degli angoli adiacenti ad essi lati ne' triangoli interni della base, convergenti in *I*; dunque gli angoli rimanenti de' triangoli esterni, che compongono l' angolo solido *A*, sono minori degli angoli, che hanno intorno al punto *I* i triangoli interni della base, e però essendo questi uguali a quattro retti, quelli ne sono minori. Il che ec.

a 20. xi.

PROPOSIZIONE XXII.

Se siano di tre angoli piani BAC, CAD, DAE, *due qualsivoglia maggiori del terzo, e contenuti da rette tutte uguali, delle basi* BC, CD, DE, *che ne congiungono i termini, si potrà constituire un triangolo.*

FIG. 191.

Li

I Termini *B*, *C*, *D*, *E* di quelle rette uguali, sono in un arco circolare, il cui centro *A*, e delle basi suddette saranno sempre due maggiori della rimanente; perchè se si dubitasse, essere le due *BC* + *CD* maggiori dell' altra *DE*, congiunta la *BD*, per essere li due angoli *BAC*, *CAD*, cioè l' angolo *BAD*, maggiore dell' altro *DAE*, ed i lati uguali, la base *BD* è della base *DE* maggiore; ma le due *BC*, *CD* sono maggiori della *BD*, dunque sono ancora esse maggiori della *DE*; però delle tre linee *BC*, *CD*, *DE* riuscendo sempre due maggiori della terza, se ne può fare un triangolo [a]. Il che ec.

a 22. I.

PROPOSIZIONE XXIII. PROBL.

FIG. 192.

Dati i tre angoli, come nella precedente, li quali però siano minori di quattro retti, farne un angolo solido.

DElle loro basi *BC*, *CD*, *DE*, congiunte a' termini de' lati uguali di detti angoli, se ne faccia un triangolo *FGH* [b], e gli si circoscriva un cerchio, il cui raggio *FI* sarà minore del lato *AB*, perchè, se gli fosse uguale, essendo nel cerchio *BDE*. inscritte le due basi *BC*, *CD*, sarebbe all' altra *DE* uguale la *BD*, essendo il cerchio del raggio = *AB* circoscritto al triangolo delle tre linee *AC*, *CD*, *DE*; ma si è provata la *BD* maggiore della *DE* [a], dunque non gli può essere uguale. Ne meno può essere *FI* maggiore di *BA*, o di *CA*, perchè prolungata *CA* in *L*, e fatta *CL* uguale ad *FI*, se col raggio *CL* si descrivesse l' arco circolare *MCN*, ed in esso si adattasse *CM* = *CD*, e *CN* = *CB*,

b 22. XI.

con-

congiunta MN doverebbe essere uguale alla DE; ma per essere l'angolo NCM maggiore di BCD, ed i lati $CN = CB$, e $CM = CD$, la base MN sarà maggiore di BD, dunque sarebbe ancora maggiore della DE; pertanto FI deve essere minore di AB, e degli altri lati AC, AD, AE, uguali; onde il quadrato di AB sarà maggiore del quadrato FI; si ponga dunque nel centro I del circolo FGH perpendicolare al piano di esso circolo la retta IK, il di cui quadrato uguagli l'eccesso del quadrato AB sopra il quadrato IF; dunque congiunte le rette FK, GK, HK, sarà ciascuna uguale a' lati AB, AC, AD, essendo il quadrato FK = a quadrati FI, ed IK, il quale è l'eccesso del quadrato AB, ovvero AC sopra il quadrato FI, onde $FK = AB$, e così $KH = AC$, e $KG = AD$, ed essendo le basi HF, FG, GH uguali alla base BC, CD, DE, sarà l'angolo $FKH = BAC$, e l'angolo $FKG = CAD$, e l'altro $GKH = DAE$; dunque l'angolo solido $FKHG$ è composto de' tre angoli piani dati BAC, CAD, DAE. Il che dovea farsi.

PROPOSIZIONE XXIV.

Il solido AB *composto di piani paralleli, averà i piani opposti* AG *e* DB, AC *ed* FB *ec. parallelogrammi simili, ed uguali.* FIG. 193

IL piano AC essendo segato da' piani paralleli AE, BH, le loro comuni sezioni AD, HC sono parallele; e l'istesso piano AC essendo ancora segato da' piani HF, CE paralleli, saranno ancora le rette AH, DC parallele [a], dunque $ADCH$ è un

a 16. XI.

K

è un parallelogrammo, in cui saranno uguali i lati opposti, cioè $AD = CH$, ed $AH = DC$. Similmente si proverà essere $EDCB$ un parallelogrammo, e la EB uguale, e parallela a DC, e la DE uguale, e parallela a BC; ed $ADEF$ un parallelogrammo, in cui EF è uguale, e parallela a DA, ed ED uguale, e parallela ad FA; onde essendo AH, ed EB uguali, e parallele all'istessa DC, sono uguali, e parallele tra loro, ed altresì EF, ed AD, e CH sono uguali, e parallele; dunque l'angolo ADC sarà uguale all'angolo FEB [a], e similmente gli altri angoli DCH, EBG si proveranno uguali; ed è $AD \cdot DC :: FE \cdot EB$ per l'ugualità de' lati omologhi, dunque sono simili, ed uguali i parallelogrammi opposti AC, FB, e l'istesso proverassi degli altri FD, GC, e delli FH, EC. Il che era da dimostrarsi.

a 10. XI.

PROPOSIZIONE XXV.

FIG. 194.

Il solido parallelepipedo ABCDR, *segandosi col piano* EGFH *parallelo agli opposti* BTCO, ASDR, *saranno le di lui porzioni* AEFD, BEFC *proporzionali alle loro basi* AEHR, BEHO.

SI concepisca prolungato dall'una, e dall'altra parte esso parallelepipedo, e presa $AI = AE$, e $BK = EB$, si concepiscano eretti i piani $ILQM$, $KOPN$ paralleli a' piani $ASDR$, $BTCO$; saranno li parallelogrammi $AIMR$, $AEHR$ uguali, e così ancora $BEHO = BKNO$, e tutti gli altri corrispondenti si uguaglieranno; perciò il solido $AEFD = IASQ$, ed il solido $BEGC = KBTP$; onde quanto si moltiplicasse la base $AEHR$ nella

base

base *EIM*, tanto riuscirebbe moltiplicato il solido *AEFD* nel solido *IEGQ*; e quanto fosse moltiplicata la base *BEHO* nella base, *EKN* tanto sarebbe il solido *BEGC* moltiplicato nel solido, *GEKP*; e secondo che fosse la base *EIM* uguale, maggiore, o minore della base *EKN*, tanto sarebbe il solido *IEGQ*, uguale, maggiore, o minore del solido *GEKP*; dunque come la base *AEHR* alla base *BEHO*; così deve essere il solido *AEFD* al solido *BEGC*, come dovea dimostrarsi.

COROLLARIO I. E' manifesto, essere dette porzioni parallelepipede proporzionali alle loro lunghezze, o altezze *AE*, *EB*, le quali sono, come *AEHR* a *BEHO*.

COROLLARIO II. Nell' istessa maniera si proverebbe ancora ne' prismi da qualunque sorta di base poligona equabilmente promossi, che segati da un piano parallelo alle basi, ne riuscirebbero le porzioni proporzionali alle lunghezze, o altezze loro.

PROPOSIZIONE XXVI. PROBL.

Alla data retta linea AB *applicare sul punto* A *un angolo solido* BALI, *uguale al dato* DCFE. FIG. 195.

DA qualunque punto *F* del lato *CF*, si tiri sopra il piano *DCE* la perpendicolare *FG*, e congiunta *CG*, e per lo punto *G* tirata in esso piano la retta *DGE*, si congiungano le rette *DF*, *FE*; indi posta la *AH* = *CD*, e fatto l' angolo *HAK* = *DCG*, e presa la *AK* = *CG*, e l' angolo *HAI* = *DCE*, congiunta la *HK* sarà = *DG*, per essere i lati *HA*, ed *AK* uguali a' lati *DC*, e

GG, e l' angolo compreso da essi lati uguale; ed ancora l' angolo *AHK* sarà = *CDG*, e prolungata la *HK* in *I* alla retta *AI*, sarà la *HI* = *DE*, e la *AI* = *CE*, perchè ne' triangoli *HAI*, *DCE*, gli angoli *AHI*, ed *HAI* sono uguali agli angoli *CDE*, *DCE* ed il lato *AH* = *CD*; onde ancora la *KI*, sarà = *GE*, ed eretta la *KL* perpendicolare al piano *HAI*, e fatta = *GF*, congiunta la retta *AL*, sarà fatto l' angolo solido *BALI* = *DCFE*; imperocchè congiunte le rette *HL*, *LI*, essendo *HK* = *DG*, e *KL* = *GF*, e gli angoli retti *HKL*, *DGF* uguali, ancora la base *HL* sarà uguale a *DF*; e similmente essendo *KI* = *GE*, e *KL* = *GF*, e gli angoli in *K*, ed in *G* retti, la base *LI* = *FE*; dunque i triangoli *HAL*, *DCF* hanno tutti i lati corrispondenti uguali, e però l' angolo *HAL* = *DCF*; similmente ciascun lato di *LAI* uguaglia ciaschedun lato di *FCE*, dunque ancora l' angolo *LAI* = *FCE*, e l' angolo *HAI* = *DCE*, dunque tutti gli angoli essendo uguali, l' angolo *HALI* uguaglia il dato angolo solido *DCFE*. Il che ec.

FIG. 196. NOTA. *Se l' angolo solido dato, fosse contenuto da più di tre angoli piani, si potrebbe ad ogni modo applicare ad una data retta, in un dato punto l' angolo solido uguale ad esso. Per esempio sia l' angolo dato* DCFEM, *contenuto da quattro angoli piani; si seghi con un piano quadrilineo* DEFM, *opposto al dato angolo* C, *indi condotta una diagonale* DF, *col piano* CDF *si dividerebbe esso angolo solido in due angoli contenuti da tre angoli piani; onde dopo aver fatto alla data retta linea, nel dato punto, un angolo uguale ad uno de' contenuti da tre*

ango-

angoli piani DCFE, *si potrà aggiungere l' altro angolo da tre piani contenuto* DCMF, *onde riuscirà descritto al punto della data linea l' angolo quadrilineo uguale al dato* DCEFM, *e se fosse il dato angolo compreso da più di quattro angoli piani, la base di tale angolo sarebbe un poligono divisibile in più di due triangoli, onde esso angolo potrebbe dividersi in tanti angoli trilineari, quanti sono i triangoli, in cui si spartirebbe il piano della sua base; e però aggiungendo al medesimo punto dato della data retta linea, concorrente con altre, che formano i triangoli dell' angolo solido già descritto, altri angoli solidi trilineari, che sono nel dato angolo solido, riuscirà di costituire adiacente alla data, linea dal punto dato, un angolo solido contenuto da più angoli piani, benchè fossero più di tre, e più di quattro gli angoli componenti il dato angolo solido.*

PROPOSIZIONE XXVII. PROBL.

Sopra una data retta linea AB *descrivere un solido parallelepipedo simile, e similmente posto ad un altro dato* DCEM. FIG. 197.

COstituiscasi al punto dato *A* sopra la data linea *AB* un angolo solido *BALI* = al dato *DCFE* [a], e taglisi *AL* in proporzione a *CF*, come la data *AB* al lato *CD*; e si faccia ancora l' *AI* alla *CE* nella medesima proporzione delle date *AB*, *CD*; indi compiuti i parallelogrammi *BALN*, *IALG*, *NLGO*, si compisca il parallelepipedo co' piani paralleli a questi, che sarà fatto sulla data linea *AB* il solido *BALIO* simile, e similmen-

a 26. XI.

te posto al dato *DCEFM*, avendo gli angoli uguali ad esso, ed i lati proporzionali a' lati del medesimo. Il che era da farsi.

PROPOSIZIONE XXVIII.

FIG. 198. *Segandosi un parallelepipedo* AB *col piano* CFED, *che passa per i diametri de' piani opposti, sarà segato pel mezzo.*

IMperocchè essendo i piani opposti uguali, e simili parallelogrammi *GFEA*, *CDHB*; ed ancora *GADC*, ed *FEHB*; ed il piano *CFED* comune a' due prismi *CGFEAD*, e *CBFEHD*, eretti sopra i triangoli simili, ed uguali *DAE*, ed *EHD*, a' quali pure corrispondono altri due *CGF*, *FBC* simili, ed uguali tra di loro, e con gli opposti; per tanto essi prismi sono uguali; onde il parallelepipedo dal piano *CFED* resta diviso pel mezzo.

PROPOSIZIONE XXIX.

FIG. 199. *I solidi parallelepipedi* AGHCDEFB, AGHEMLKI, *sopra l' istessa base* AGHE, *tra gli stessi piani paralleli* AH, FK, *con i lati* AM, GL, *ed* EI, HK *prodotti all' istesse linee de' lati* FB, DC *prolungate nell' istesso piano, sono sempre parallelepipedi tra di loro uguali.*

IMperocchè essendo $DC = EH = IK$, aggiunta CI, è $DI = CK$, ma ancora $DE = CH$, ed $EI = HK$, dunque il triangolo *DEI* è uguale, e simile al triangolo *CHK*, e così ancora i triangoli *FAM*, *BGL* sono simili, ed uguali; ed ancora il parallelogrammo *DIMF* è uguale, e simile

le a *CKLB*, e così *DEAF* a *CHGB*, ed *EIMA* ad *HKLG*, e perciò il prisma triangolare *DIEMFA* uguaglia il prisma *CKHLBG*, e tolto di comune *CPIMNB*, ed aggiunto a' rimanenti pezzi il prisma *EPHGNA*, riesce il parallelepipedo *AGHCDEFB* uguale all' altro *AGHEMLKI*. Il che ec.

PROPOSIZIONE XXX.

Quando ancora il parallelogrammo IMLK *opposto alla base comune* EAGH *di due parallelepipedi tra i medesimi piani paralleli, non s' incontrasse colla direzione delle rette parallele* DC, FB, *ad ogni modo essi parallelepipedi saranno uguali.* FIG. 200.

ESse rette prolungate *DC*, *FB* parallele ad *AG*, e ad *IK*, seghino le altre rette tra di loro parallele *IM*, *KL* ne' punti *N*, *O*, *Q*, *P*, sarà il parallelogrammo *NOPQ* = *DCFB* = *AEHG*; onde condotte le rette *EN*, *HO*, *AQ*, *GP* sarà il parallelepipedo *AEHGPQNO* = *AEHGBCDF* a, e similmente *AGHEMLKI* = *AEHGPQNO*, terminando all' istesse linee prodotte *IM*, *KL*; dunque sono ancora uguali *AEHGBCDF*, ed *AGHEMLKI*, posti sull' istessa base, e tra gli stessi piani paralleli, benchè non s' incontrino colla direzione delle rette *DC*, *FB*. Il che ec. a 29. XI.

COROLLARIO. È manifesto, che se ancora sopra l' istessa base *IMLK* fosse tra gli stessi piani paralleli descritto un altro parallelepipedo, sarebbe uguale ad esso *AGHEMLKI*, e conseguentemente ancora uguale a ciascuno degli altri due *AEHGBCDF*, ed *AEHGPQNO*; onde ancora li parallelepipedi, che hanno basi uguali, e so-

no tra i medesimi piani paralleli, sono tra di loro uguali.

PROPOSIZIONE XXXI.

I solidi parallelepipedi, che hanno uguali basi, e la medesima altezza, fra loro sono uguali.

ESsendo che gli stessi piani paralleli hanno la medesima altezza in qualunque sito, ed un piano parallelo all' istessa base, se fosse sopra, o sotto il parallelogrammo del parallelepipedo, opposto alla base, averebbe maggiore, o minore altezza; dunque i solidi parallelepipedi, che hanno la medesima altezza, possono disporsi tra gli stessi due piani paralleli, e però avendo le basi uguali, dovranno essere uguali tra loro [a].

a Coroll. 30. XI.

PROPOSIZIONE XXXII.

FIG. 201.

I solidi parallelepipedi AE, GO, *che hanno la medesima altezza, sono tra di loro, come le basi* AC, GM.

PRolungata *LG* in *F*, si faccia il parallelogrammo *HGFI* = *ABCD*, e si compisca il parallelepipedo *FGNQRIH*, tra gli stessi piani paralleli dell' altro: sarà questo parallelepipedo = *ABCDTEVS*, avendo uguali basi, e la medesima altezza [b]; ma *FGNQRIH* all' altro *GNPLOQHM*, è come la base alla base [c], cioè come *IFGH* (che = *ABCD*) a *GLMH*; dunque ancora il parallelepipedo *AE* all' altro *GO*, è come la base *AC* alla base *GM*. Il che ec.

b 31. XI.

c 25. XI.

Ancora i prismi ugualmente alti sono come le loro basi, perchè se sono basi triangolari, sono la

metà

metà de' parallelepipedi eretti sopra i parallelogrammi doppj di tali triangoli: se sono basi poligone, possono dividersi in triangoli, ed essi prismi interi in altrettanti prismi triangolari proporzionali alle loro basi.

PROPOSIZIONE XXXIII.

I solidi parallelepipedi simili HIMKZ, ABDGF *sono in proporzione tripla de lati omologhi* IM, EG. FIG. 102.

SI prolunghino la retta LM in $MO = EF$, la retta IM in $MN = EG$, e la retta RM in $MP = EA$, e compiuti i parallelogrammi OMN, OMP, NMP, si tirino gli opposti piani paralleli, da cui si formerà il parallelepipedo $OPQNM$ uguale, e simile al dato $ABDGF$, avendo gli stessi angoli solidi, e i medesimi parallelogrammi uguali, e simili. Prolungati ancora i parallelogrammi, si compiscano i solidi parallelepipedi $KLSYM$, $LTVSQM$; sarà il parallelepipedo $HIMKZ$ al conseguente $KLSYM$, come la base IR alla base RN, cioè come il lato IM ad MN; ed è $KLSYM$ ad $LTVSQM$, come le basi RN, NP, cioè come RM ad MP; e finalmente $LTVSQM$ ad $OPQNM$, come le basi LN, NO, cioè come LM ad MO; dunque la proporzione di $HIMKZ$ ad $OPQNM$, ovvero all'uguale solido $ABDGF$, è composta delle tre ragioni uguali, cioè di IM ad MN, di RM ad MP, e di LM ad MO (perchè essendo simili i parallelepipedi, i loro lati omologhi devono avere l'istessa proporzione) dunque la ragione di essi parallelepipedi simili è tripla di quella di un lato IM al lato omologo $EG = MN$. Il che doveasi dimostrare.

Co-

COROLLARIO. Se quattro linee sono proporzionali, un solido fatto sopra alla prima, al solido simile fatto sopra alla seconda, sta come la prima alla quarta, che ha ragione tripla della prima alla seconda.

PROPOSIZIONE XXXIV.

FIG. 203.

I parallelepipedi uguali ACD, NPI *hanno le basi reciproche dell' altezze; e quei parallelepipedi, in cui le basi sono in ragione reciproca dell' altezze, sono tra di loro uguali.*

SE avessero uguale altezza i solidi, dovrebbero ancora avere le basi uguali, per essere tra di loro uguali; onde la base del primo alla base del secondo sarebbe come l' altezza di questo all' altezza di quello. Se poi le altezze sono disuguali, essendo quella di *NPI* maggiore di quella di *ACD*, si tagli *NPI* col piano *OLKM* parallelo alla base *HGIQ*, in altezza uguale a quella del solido *ACD* (tirata *NX* perpendicolare al piano della base *HGIQ*, e segante il piano *OLKM* in *V*, in maniera, che *VX* sia uguale all' altezza del solido *ACD*) sarà *ACD* . *OLIQ* :: *BZDS* . *HGIQ* [a]; ma *ACD* = *NPI*, dunque ancora *NPI* . *OLIQ* :: *BZDS* . *HGIQ*; ma *NPI* . *OLIQ* :: *NH* . *HO* [b] :: *NX* . *VX*, dunque *BZDS* . *HGIQ* :: *NX* . *VX*; e però la base dell' uno alla base dell' altro, è come l' altezza di questo all' altezza di quello; e viceversa essendo *BZDS* . *HGIQ* :: *NX* . *VX*, che uguagli l' altezza di *ACD*, sarà *ACD* . *OLIQ* :: *NPI* . *OLIQ*; e però *ACD* = *NPI*. Il che dovea dimostrarsi.

a 32. xi.
b 25. xi.

Co-

COROLLARIO. Ancora i prismi triangolari uguali, essendo la metà di uguali parallelepipedi (*per la Proposizione* 28.) devono avere le basi reciproche dell' altezze; e se hanno le basi reciproche dell' altezze, devono essere uguali, essendo l' istessa proporzione delle basi di questi prismi, che quella de' parallelepipedi, e l' istessa altezza di questi, e di quelli.

PROPOSIZIONE XXXV.

FIG. 204.

Essendo uguali i due angoli solidi HALI, DCFE, *contenuti da angoli piani* HAI = DCE, HAL = DCF, LAI = FCE, *se dalle due linee* AL, CF *sublimi al piano degli angoli uguali* HAI, DCE, *si tramandano in essi piani le perpendicolari* LK, FG, *congiunte le rette* AK, CG *riuscirà l' angolo* GCF = KAL.

SIano prese le due sublimi *AL*, *CF* tra di loro uguali, e tirate le *LK*, *FG* perpendicolari a' piani soggetti, si tiri la *KI*, e la *GE* perpendicolari alle *AI*, *CE*, e prodotte *IK* in *H*, ed *EG* in *D* agli altri lati *AH*, *CD*, si congiungano *HL*, *IL*, ed *EF*, *DF*. Essendo il quadrato *AL* = a' quadrati *AK*, *KL*, ed il quadrato *AK* = a' quadrati *AI*, *IK*, dunque il quadrato *AL* = a' tre quadrati *AI*, *IK*, *KL*; ma i due quadrati *IK*, *KL* = al quadrato *IL*; dunque il quadrato *AL* = a' quadrati *AI*, ed *IL*; però l' angolo *AIL* è retto. Similmente si proverà retto l' angolo *CEF*; dunque essendo l' angolo *LAI* = *FCE*, e l' angolo *AIL* = *CEF*, ed il lato *AL* = *CF*, sarà ancora *AI* = *CE*, ed *IL* = *EF* [a]; però essendo an-

a 26. 1.

ancora l' angolo $HAI = DCE$, ed $AIH = CED$, ed il lato $AI = CE$, sara pure $AH = CD$, ed $HI = DE$ [a]; ed essendo i lati $AH = CD$, ed $AL = CF$, e l' angolo $HAL = DCF$, sarà pure la base $HL = DF$; indi ne' triangoli HLI, DFE, essendo tutti i lati del primo = a quelli del secondo, ancora gli angoli corrispondenti saranno uguali; perciò ne' triangoli KIL, GEF, essendo l'angolo $KIL = GEF$, ed i retti IKL, EGF uguali, ed $IL = EF$, sarà pure $IK = EG$, e $KL = GF$; onde essendo $AI = CE$, ed $IK = EG$, e l' angolo $AIK = CEG$, sarà pure $AK = CG$; però ne' triangoli AKL, CGF, essendo $AL = CF$, ed $AK = CG$, e $KL = GF$, l' angolo GCF sarà $= KAL$. Il che dovea dimostrarsi.

a 26. 1.

COROLLARIO. Essendosi mostrata $KL = GF$, dunque in due angoli solidi compresi da tre angoli piani, ciascuno uguale al suo corrispondente, presi due lati uguali AL, CF, e da' loro termini tirate sopra i piani opposti HAI, DCE le perpendicolari LK, FG, riescono queste tra di loro uguali altezze.

PROPOSIZIONE XXXVI.

FIG. 205.

Essendo tre linee A, B, C *proporzionali, il solido parallelepipedo* EDKF *fatto dalle date tre linee, è uguale al solido* LMQN *equiangolo fatto dalla sola media* B, *cui siano uguali tutti i suoi lati.*

Essendo $DF = A$, $DE = B$, $DK = C$ nel parallelepipedo $EDKF$, e ciascun lato MN ML, $MQ = B$ nell' altro solido equiangolo $LMQN$, sarà $DF \cdot MN :: MQ \cdot DK$, onde intorno agli ango-

angoli uguali *FDK*, *NMQ*, essendo i lati reciprochi, è il parallelogrammo *FDKI* = *NMQR* [a], ed essendo *DE* = *ML*, chi tirasse da' punti *E*, *L*, sopra i piani *KDF*, *QMN* le perpendicolari, sarebbero nell'uno, e nell'altro solido uguali altezze [b]; dunque essendo ancora le basi *FDKI*, *NMQR* uguali, essi solidi parallelepipedi sono uguali. Il che ec.

[a] 14. VI.

[b] Coroll. 35. XI.

PROPOSIZIONE XXXVII.

FIG. 206

Se quattro rette linee AB, CD, EF, GH *sono proporzionali, due parallelepipedi simili* ABK, CDL *fatti sopra alle prime, saranno proporzionali a due altri simili tra di loro* EFM, GHN, *fatti sopra all' ultime.*

IMperocchè *ABK* a *CDL* è in ragione tripla di *AB* a *CD* [c]; e similmente *EFM* a *GHN* è in ragione tripla di *EF* a *GH* [c]; dunque essendo *AB* · *CD* :: *EF* · *GH*, ancora la tripla ragione della prima è uguale alla tripla della seconda; e però *ABK* · *CDL* :: *EFM* · *GHN*. Il che era da dimostrarsi.

[c] 33. XI.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

Tav. XI. FIG. 207.

Sia il piano CAD *perpendicolare ad un altro* ADB; *se da qualunque punto* E *del primo, si tira la perpendicolare sopra il secondo, caderà nella loro comune sezione* AD.

PErchè se cadesse fuori in *F*, tirata nel piano *CAD* sopra la retta *AD* la perpendicolare *EG*, questa pure sarebbe al piano *ADB* perpendicolare, e congiunta la *FG*, avrebbe il triangolo

EFG

EFG, in *F*, ed in *G* due angoli retti; il che è impossibile; dunque ec.

PROPOSIZIONE XXXIX.

FIG. 208.

Nel solido parallelepipedo ABCDE *tirato un piano* MNQP, *segante pel mezzo i lati* AB, DC, GT, EF *de' parallelogrammi opposti, ed un altro piano* KLIH, *segante pel mezzo i lati* AD, BC, GE, TF *degli opposti parallelogrammi, la comune sezione* OR *di tali piani, ed il diametro del solido* AF *congiungente gli angoli opposti, si segheranno pel mezzo nel punto* S.

SI congiungano le rette *AO*, *CO*, *GR*, *FR*. Essendo *AM* = *CN* (perchè sono la metà delle opposte, parallele, ed uguali *AB*, *DC*) ed *MO* = *NO* (essendo *MN* divisa pel mezzo in *O*, siccome l' opposte, e parallele ad essa *AD*, *BC* sono divise pel mezzo dalla *KL*) e l'angolo *AMO* = *ONC*, per essere alterni delle parallele, sarà pure *AO* = *CO*, e l' angolo *MOA* = *NOC*, ciascuno de' quali coll' angolo *AON* facendo due retti, saranno esse *AO*, *OC* per diritto fra loro; e similmente si proverà essere *GRF* una linea dirittamente continuata; onde essendo *AG* uguale, e parallela a *CF* (per essere ciascuna di loro parallela, ed uguale a *DE*) le rette *AC*, *GF* sono pure uguali, e parallele, onde *ACFG* è un parallelogrammo, nel di cui piano si segano *OR*, ed *AF* in *S*; e ne' triangoli *AOS*, *FRS*, l' angolo alterno *SAO* = *SFR*, ed *AOS* = *FRS*, col lato *AO* = *FR*, dimostrano essere pure *OS* = *SR*, ed *AS* = *SF*; dunque la comune sezione *OR* di

detti

detti piani, ed il diametro, che congiunge gli angoli opposti *AF* del medesimo parallelepipedo si tagliano pel mezzo in *S*. Il che ec.

PROPOSIZIONE XL.

Due prismi d' uguale altezza ABCFED, MGHILK, *avendo il primo per base il parallelogrammo* ABCF *doppio della base triangolare* MGH *dell' altro, sono tra di loro uguali.* FIG. 209.

IMperocchè compiuti essi prismi in parallelepipedi, con fare i parallelogrammi *ABDN, FCEO*, ed *MGHP, KLIQ*, riuscirà la base *MGHP* = *ABCF*, essendo l' una, e l' altra doppia del triangolo *MGH*; dunque tali parallelepipedi *ABCEOND*, ed *MGHIQKL* sono uguali, avendo uguale altezza, ed uguali basi; ma i suddetti prismi sono la metà di tali parallelepipedi[a], dunque ancora essi prismi erano tra loro uguali. Il chè dovea dimostrarsi.

a 28. XI.

ELE-

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
DI EUCLIDE
LIBRO XII.

∽∽

PROPOSIZIONE I.

FIG. 210. *I Poligoni simili* ABCDE, FGHIK *inscritti ne' cerchj sono come i quadrati de' loro diametri* AL, FM.

COndotte le rette *EB*, *EL*, e *KG*, *KM*, essendo l' angolo $BAE = GFK$, ed i lati intorno ad essi proporzionali, cioè $BA \cdot AE :: GF \cdot FK$, per la similitudine de' poligoni, sono simili i triangoli *ABE*, *FGK*, onde l' angolo $ABE = FGK$; ma a quello è uguale l' angolo *ALE*, ed a questo si uguaglia l' angolo *FMK* [a], dunque i triangoli *ALE*, *FMK*, hanno uguali gli angoli in *L*, e in *M*, e sono gli angoli *AEL*, *FKM* retti [b]; però ancora essi triangoli sono simili, onde $AE \cdot AL :: FK \cdot FM$, e permutando, $AE \cdot FK :: AL \cdot FM$, però il poligono fatto sopra il lato *AE*, al simile sopra il lato *FK*, sta come il quadrato di *AL* al simile quadrato di *FM* [c]. Il che era da dimostrarsi.

a 21. III.
b 31. III.
c 22. VI.

AV-

AVVERTIMENTO.

Nella seguente proposizione è supposta la prima del libro x. *di cui non si è addotta quì la dimostrazione; però basta osservare, che date due quantità disuguali* AB, *e* C (*o siano linee, o superficie, o solidi*), *se dalla maggiore si levi* AD, *che ne sia la metà, e dalla rimanente* DB *si levi la* DE, *che sia la metà di essa, e così di mano in mano si continui di fare, riuscirà finalmente il resto minore della data quantità* C; *imperocchè questa raddoppiata in* GI, *e la* GI *raddoppiata in* GH, *e questa in* GF *ec. dovrà finalmente farsi maggiore di essa* AB; *onde la metà di* AB *sarà minore di* FH, *metà di* FG; *e la metà di* DB, *sarà pure minore di* HI, *metà di* HG, *e la metà di* EB, *che sia* EL, *è minore di* IK, *metà di* IG; *e però il resto* LB *sarà minore di* KG, *la quale è uguale alla data* C. FIG. 211.

Che se dalla data AB *si toglie* AD *maggiore della metà di essa, e dalla rimanente* DB *la* DE *maggiore della metà della rimanente* DB, *e dalla* EB *si tolga la* EL *maggiore della metà di quella ec. maggiormente si vede, che alla fine il resto* LB *sarà minore della data* C. *Il che è quanto si mostra nella proposizione* I. *del libro* x., *supposta nella seguente*.

PROPOSIZIONE II.

I cerchj ABT, EFN *sono proporzionali a' quadrati de' loro diametri* AC, EG. FIG. 212.

IMperocchè si faccia come il quadrato *AC* al quadrato *EG*, così il cerchio *AST* allo spazio *Z*. Se questo non fusse uguale all' altro cerchio *ENM*, o sarebbe minore, o maggiore di esso. Sia minore, sicchè gli manchi la quantità *X*, per uguagliarlo. Inscrivasi nel cerchio *ENM* il quadrato *EFGH*, il quale essendo la metà del quadrato del diametro *EG*, che si circoscriverebbe al cerchio, perciò *EFGH* è maggiore della metà di esso cerchio; indi ne' segmenti residui, divisi per mezzo gli archi in *O*, *M*, *L*, *N*, e congiunte le rette *EO*, *OH*, *GM*, *MF*, *EL*, *FL*, *GN*, *HN*, saranno questi triangoli *EOH*, *GMF*, *ELF*, *GNH* maggiori della metà de' segmenti circolari, a cui sono inscritti, essendo qualunque triangolo la metà del rettangolo circoscritto al suo segmento, come *HNG* è la metà di *HPQG*; e così proseguendo la divisione per mezzo degli archi rimanenti, con tirarne le sue corde, saranno sempre questi altri triangoli più della metà de' segmenti circolari residui, i quali però finalmente riusciranno minori della quantità *X* [a], con cui il cerchio eccede lo spazio *Z*, onde l' inscritto poligono, quale sia *EOHNGMFL*, o un altro di doppio numero di lati, sarà maggiore dello spazio *Z*. Perlochè, inscritto nell' altro cerchio *AST* un simile poligono *AKBSCTDV*, sarebbe questo a quello, come il quadrato *AC* al quadrato *EG* [b], cioè come il cerchio *AST* allo spazio *Z*; dunque essendo quel poligono *EOHNGMFL* maggiore di *Z*, sarebbe ancora l' altro poligono *AKBSCTDV* maggiore del cerchio *AST*, in cui è inscritto. Dunque non poteva essere *Z* minore del cerchio *ENM*. Ne

meno

a *Avvert. preced.*

b I. XII.

meno poteva supporsi maggiore di esso, perchè facendosi il cerchio *ENM* ad uno spazio *R*, come il quadrato *EG* al quadrato *AC*, cioè come *Z* al cerchio *AST*, essendo il cerchio *ENM* minore di *Z*, ancora lo spazio *R* sarebbe minore del cerchio *AST*; il che abbiamo veduto essere impossibile. Era dunque *Z* uguale al cerchio *ENM*; e però il cerchio *AST* al cerchio *ENM* è come il quadrato del diametro *AC* al quadrato del diametro *EG*. Il che ec.

Corollario I. Quindi si ha, che un cerchio ad un altro sta, come qualunque poligono inscritto nel primo al simile poligono inscritto nel secondo cerchio, essendo tutti proporzionali a' quadrati de' diametri di essi cerchj.

Corollario II. Dal modo, con cui si è dimostrata questa proposizione, può dedursi generalmente, che se in due date grandezze superficiali, o solide, possono tali quantità inscriversi maggiori della metà di esse, e nel rimanente altre quantità, che pure siano maggiori della metà di tali residui, cui sono inscritte; e così nel resto di tali grandezze s'interpongano altre quantità maggiori della metà di tali spazj, e così sempre, onde l'eccesso di qualunque data grandezza sopra la somma di queste inscritte quantità, divenga minore di qualunque data minima grandezza; e la somma delle quantità inscritte in una di tali proposte grandezze, stia alla somma di altrettante inscritte similmente nell' altra, sempre in una data ragione, ancora quelle intere grandezze dovranno essere nella medesima ragione, come quì si è provato ne' circoli, che essendo in essi inscritti simili poligoni, li

quali ne lasciano l' eccesso minore della data quantità *X*, e sono sempre come i quadrati de' diametri, devono essere i detti circoli nell' istessa ragione.

PROPOSIZIONE III.

FIG. 213. *Ogni Piramide ABCD triangolare può dividersi in due piramidi* AEGH, EBFI *uguali, simili tra se, e con l' intera, ed in due prismi* EICHKF, EHGDKF, *tra di se uguali, la cui somma però sarà maggiore della metà della data Piramide* ABCD.

TAgliati per mezzo tutti i lati ne' punti *E*, *H*, *G*, *K*, *F*, *I*, e congiunte le rette *EH*, *HG*, *GE*, *EI*, *IF*, *FK*, *KH*, *HI*, *IK*, *EF*, le quali segando sempre due lati proporzionalmente, sono parallele a gli opposti lati, è manifesto essere uguali i triangoli *AEH*, *EBI*, e simili tra di se, ed all' intero *ABC*: parimente i triangoli *AEG*, *EBF* sono uguali, e simili ad *ABD*; e così accade ne' triangoli uguali *AHG*, *EIF*, simili ad *ACD*, e negli altri due *HEG*, *IBF* tra loro uguali, e simili a *CBD*; dunque le piramidi *AEGH*, *EBFI* sono uguali, e simili tra di se, e coll' intera *ABCD*. I prismi poscia, che restano *EICHKF*, *EHGDKF*, sono ugualmente alti, e quello ha per base il parallelogrammo *ICKF*, doppio del triangolo *IFK*, e però doppio della base triangolare *FKD* di quest' altro prisma, essendo *IFK* = *FKD* nel parallelogrammo *IFDK*, però sono prismi uguali [a]; ma il primo è maggiore della Piramide *IKCH*, la quale è uguale a qualunque dell' altre due, per esempio ad *AEGH*; dunque ambidue questi prismi

a 40. XI.

ſmi ſono maggiori dell' altre due piramidi, e però ſono più della metà dell'intera piramide *ABCD*. Il che ec.

PROPOSIZIONE IV.

Le due piramidi triangolari ugualmente alte ABCD, LMON, *ſe ſi dividano come nella precedente in due ſimili uguali piramidi, e ne' due priſmi uguali, e ciaſcuna delle particolari piramidi ſimilmente dividaſi come le intere, e queſte, che ne riſultano, pure dividanſi, come l' altre, e così di mano in mano; come la baſe* CBD *della prima piramide, alla baſe* OMN *della ſeconda, così ſaranno tutti i priſmi fatti in quella, a tutti gli altrettanti priſmi fatti in queſta.*

FIG. 213. 214.

Essendo diviſi per mezzo tutti i lati delle intere piramidi, come nella coſtruzione della precedente propoſizione, ſiccome ſono eſſe ugualmente alte, ancora i priſmi *FEHGDK, TRPQNV* ſono ugualmente alti, e però ſono come le loro baſi *FKD, TVN*[a], e queſte ſono, come le intere baſi *CBD, OMN*, quadruple di tali triangoli, dunque i priſmi *FEHGDK*, e *TRPQNV*, ed ancora li due uguali *FEHGDK* + *FEHKCI*, e li due uguali *TRPQNV*, + *TRPVS*, ſono come le baſi dell' intere Piramidi, *CBD*, ed *OMN*. Che ſe ſi farà la coſtruzione ſteſſa nelle Piramidette *AEGH, LRPQ*, e nell' altre due *EBFI, RMTS*, li priſmi dell' una a quelli dell' altra ſaranno pure come il triangolo *EHG* · *RPQ* :: *BIF* · *MST* :: *CBD* · *OMN*; e così riuſcirà ſempre; dunque la ſomma di tutti li priſmi, che

a Coroll. prop. 32 XI.

si fossero inscritti nella Piramide *ABCD*, ad altrettanti inscritti nella Piramide *LMON* sarà sempre, come le basi di esse Piramidi *BCD*, *MON*. Il che ec.

PROPOSIZIONE V.

Le Piramidi triangolari ugualmente alte ABCD, LMON *sono come le basi loro* BCD, MON.

IMperocchè fatta in essi la costruzione de' Prismi, *come nella precedente proposizione*, riescono le somme di essi proporzionali alle basi *BCD*, *MON*; ma sono tali, che li primi due prismi sono maggiori della metà di esse Piramidi [a], e gl' inscritti nelle piramidette residue sono più della metà di esse ec. dunque la piramide intera *ABCD* all' ugualmente alta *LMON* è nell' istessa proporzione delle basi *BCD*, *MON* [b]. Il che ec.

a 3 XII.

b *Coroll.* 2 *prop.* 2. XII.

PROPOSIZIONE VI.

FIG. 215.

Le Piramidi ABCED, *ed* FHIKLG *ugualmente alte con qualsivoglia basi poligone* BCED, *ed* HGLKI, *sono pure tra di loro, come le dette basi*.

DIvidansi le basi poligone colle diagonali *CD*, *GI*, *GK*, ne' suoi triangoli; si vedranno esse piramidi co' piani, che passano per la loro cima, e per dette diagonali, divise in tante piramidi triangolari ugualmente alte, le quali saranno, come le loro basi triangolari [c], dunque componendo *BCED* a *CED* sarà come la piramide *ABCED* alla *ACDE*; ed è *CDE* a *GHI*, come *ACDE* ad *FHGI*, e similmente componendo,

c 5. XII.

do, e convertendo, *GHI* ad *HGLKI*, come *FHGI* ad *FHIKLG*; dunque per ugualità ordinata, *BCED* . *HGLKI* :: *ABCED* . *FHIKLG*. Il che ec.

PROPOSIZIONE VII.

Ogni Prisma triangolare ABCDEF *può dividersi in tre piramidi uguali* ACBF, ACDF, CDEF.

FIG. 216.

SI tirino i diametri de' parallelogrammi *AC*, *CF*, *FD*. I triangoli *ACB*, *ACD* essendo uguali, saranno pure uguali le piramidi ugualmente alte *ACBF*, *ACDF*; e parimente essendo uguali i triangoli *ADF*, *DEF*, sono pure uguali le piramidi *ACDF*, *CDFE* della medesima altezza [a], dunque le tre piramidi, in cui resta diviso il prisma, sono tra loro uguali Il che ec.

a 4. XII.

COROLLARIO. Quindi ogni Piramide è la terza parte del prisma eretto sopra l' istessa base alla medesima altezza, quantunque fossero le basi poligone, potendo risolversi in piramidi, e prismi triangolari dell' istessa altezza, eretti sopra i triangoli, in cui dividesi qualunque poligono.

PROPOSIZIONE VIII.

Le Piramidi simili triangolari ABCD, EFGH, *sono in tripla ragione de' loro lati omologhi* AB, EF.

FIG. 217.

SI compiscano i parallelogrammi *CABK*, *GEFR* intorno a' lati de' triangoli simili *CAB*, *GEF*, ed intorno a' simili triangoli *CAD*, *GEH* li parallelogrammi *CADI*, *GEHP*; e parimente ne' simili triangoli *DAB*, *HEF* siano compiuti li pa-

 ral-

rallelogrammi *DABN*, *HEFO*; onde tirati li piani opposti, ne risulteranno due simili parallelepipedi *DICABNMK*, *HPGEFOQR*, i quali saranno in tripla ragione de' loro lati omologhi *AB*, *EF* [a]; ma essendo tali parallelepipedi doppj de' prismi *IDNBAC*, *PHOFEG* [b], e questi tripli delle piramidi *ABCD*, *EFGH* [c], sono que' parallelepipedi sestupli di queste piramidi; dunque ancora esse piramidi simili sono in tripla ragione de' loro lati omologhi *AB*, *EF*. Il che ec.

a 33. XI.
b 28. XI.
c 7. XII.

COROLLARIO. Ancora le piramidi simili di base poligona saranno in tripla ragione de' lati omologhi, perchè li poligoni simili dividendosi in simili triangoli, ne risultano simili piramidi triangolari, ciascuna copia essendo in tripla ragione de' lati omologhi, la quale riesce la medesima in ciascuna copia de' lati corrispondenti in qualunque triangolo; e però la somma di tali piramidi triangolari erette sopra un poligono alla somma di altrettante simili erette sopra l' altro poligono simile è pure in tripla ragione de' loro lati omologhi.

PROPOSIZIONE IX.

Le piramidi triangolari uguali hanno le basi reciproche dell' altezze: e quelle Piramidi, le cui basi sono delle altezze loro reciproche, sono pure uguali.

IMperocchè essendo le piramidi la terza parte de' prismi eretti sopra all' istesse basi, e alle medesime altezze [c], quando le piramidi sono uguali, sono pure uguali i prismi, e quando i prismi sono uguali, sono altresì uguali le piramidi; ma i prismi uguali hanno le basi reciproche dell' altez-

ze,

ze, e se le loro basi sono reciproche dell' altezze, i prismi sono uguali [a], dunque ancora le piramidi se uguali sono, hanno le basi reciproche delle altezze, e se le basi loro sono reciproche dell' altezze, devono essere Piramidi uguali. Il che ec.

a Coroll. 34. XI.

COROLLARIO I. Ancora le Piramidi, che hanno le basi poligone, se sono uguali, averanno le basi reciproche all' altezze, e viceversa essendo le basi reciproche all' altezze, saranno Piramidi uguali: perchè se avessero la base triangolare uguale a quel poligono, con le medesime altezze sarebbero uguali tra loro [b], ed uguali ad esse, dunque ciò, che conviene alle piramidi triangolari, ancora appartiene alle Piramidi poligone, che sarebbero le medesime, se cangiassero le basi poligone in triangoli uguali ad esse.

b 6. XII.

COROLLARIO II. Lo stesso pure vale de' prismi eretti sopra basi poligone, che essendo uguali averebbero reciproche le basi all' altezze, e viceversa, come accade alle piramidi, che sono le loro terze parti.

PROPOSIZIONE X.

FIG. 212.

Il cono è sempre la terza parte del Cilindro alla medesima altezza eretto sopra l' istessa base circolare EHM.

SE si concepisce un prisma eretto sopra il quadrato *EHGF* inscritto nel cerchio alla medesima altezza del cilindro, sarà quel prisma più della metà del cilindro, essendo appunto la metà di quell' altro prisma, che si alzasse alla medesima altezza sopra il quadrato del diametro *EG*, che es-

essendo circoscritto al cerchio, sarebbe riuscire il prisma circoscritto al cilindro, e però maggiore di esso; e similmente la piramide eretta all' istessa altezza sopra all' inscritto quadrato *EHGF*, sarebbe la metà della piramide, che avesse per base il quadrato del diametro *EG*, la quale sarebbe circoscritta al cono, e però la piramide sopra alla base *EHGF* maggiore dovrà essere della metà del cono. Similmente fatti i triangoli *EOH*, *HNG* ec. che sono più della metà de' segmenti circolari, cui sono inscritti, eretti sopra di essi li prismi all' altezza del cilindro, e le piramidi all' istessa cima del cono, saranno que' prismi più della metà degli eccessi del cilindro sopra il prisma quadrato, essendo la metà de' prismi eretti sopra un rettangolo, come *HPQG* circoscritto al segmento circolare *HNG*, il quale prisma circoscritto sarebbe a quell' eccesso cilindrico; e similmente le piramidi sopra tali triangoli saranno più della metà degli eccessi del cono sopra la piramide quadrata inscrittagli, e così sempre; dunque il cilindro al cono sta, come il prisma eretto alla medesima altezza sopra qualunque poligono inscritto nel cerchio, alla piramide ugualmente alta eretta sopra lo stesso poligono [a]: la qual proporzione è sempre tripla [b]; dunque il cilindro è sempre triplo del Cono, onde il Cono è la terza parte del cilindro. Il che ec.

a *Coroll. 2. prop. 2. XII.*
b *Cor. prop. 7. XII.*

PROPOSIZIONE XI.

FIG. 212. *I cilindri ugualmente alti sono come i cerchj* ABT, EHM *delle loro basi, e così pure sono i coni, sopra all' istesse basi circolari eretti alla medesima altezza.*

Es-

ESsendosi dimostrato, che i prismi eretti sopra i quadrati *ABCD*, *EHGF* inscritti ne' circoli, alla medesima altezza de' cilindri, ne sono più della metà di essi, ed i prismi pure eretti sopra gli altri triangoli, all' istessa altezza sono più della metà degli eccessi cilindrici sopra gli antecedenti prismi, ec. e tali prismi essendo sempre, come le loro basi, se sono ugualmente alti [a], le quali basi poligone simili sono, come i medesimi circoli [b], perciò ancora i cilindri ugualmente alti, sono come le loro basi circolari; ed i Coni parimente, che sono la terza parte di essi cilindri, sono in pari altezza, proporzionali a' cerchj delle loro basi. Il che ec.

a *Coroll. prop. 32. XI.*

b *Coroll. 1. prop. 2. XII.*

COROLLARIO. Quindi può dirsi, che i Cilindri, o i Coni di uguale altezza, sono come i prismi, o le piramidi ugualmente alte, fatte sopra simili poligoni inscritti nelle basi circolari di essi Coni, o Cilindri: essendo tanto questi, che quelli, come i quadrati de' diametri circolari, proporzionali alle basi de' poligoni, o de' cerchj stessi.

PROPOSIZIONE XII.

I cilindri simili ABDC, EFHG, *o i Coni simili inscritti in essi, sono in ragione tripla de' diametri* CD, GH *delle loro basi.*

FIG. 218.

DAll' asse del maggiore *MI* si tagli la parte *IN* uguale all' asse *LK* del minore, e per lo punto *N* si faccia passare un piano parallelo alla base, che ci farà il cerchio *QR*. Indi s' intenda eretto un prisma sopra il poligono *CODP* inscritto nella base circolare, che pervenga all' altezza dell' as-

l' aſſe TI, ed all' altezza NI; e nella baſe GVH dell' altro Cilindro ſia pure un ſimile poligono inſcritto $GVHX$, ed elevato all' altezza del cilindro LK. Il priſma dell' altezza MI a quello dell' altezza NI ſarà come MI ad NI [a] $= LK$; ma $MI \cdot LK :: CD \cdot GH$ (per la ſimilitudine de' cilindri.) dunque il priſma dell' altezza MI a quello dell' altezza NI è come ſemplicemente CD a GH. Ma il priſma dell' altezza NI all' altro inſcritto dentro il minore cilindro, dell' uguale altezza LK, è come la baſe $CODP$ alla ſimile baſe $GVHX$ [b], cioè come il quadrato CD al quadrato GH [c], e però in ragione dupla di CD a GH; dunque la ragione del priſma dell' altezza MI, a quello dell' altezza LK è compoſta della ſemplice, e della dupla della ragione de' diametri, e però è in ragione tripla di eſſi CD, GH. Ma queſti priſmi accoſtandoſi indefinitamente a' cilindri, cui ſono inſcritti, ſecondo che ſi aumenta il numero de' lati delle loro baſi, come tante volte ſi è dimoſtrato, devono avere la ragione medeſima, che detti cilindri [d]; adunque eſſi cilindri ſimili ſono pure in ragione tripla de' loro diametri CD, GH. Ma i coni ſimili inſcritti in detti cilindri, eſſendo la terza parte di eſſi [e], ſono nell' iſteſſa ragione di eſſi cilindri; dunque ſono in tripla ragione de' diametri delle loro baſi CD, GH. Il che ec.

a Coroll. prop. 25. XI.
b Coroll. prop 22. XI.
c 1. XI.
d Coroll. 2. prop. 2. XII.
e 10. XII.

Corollario. E' manifeſto, eſſere tanto i cilindri, che i coni ſimili in tripla ragione ancora de' loro aſſi proporzionali a' diametri.

PROPOSIZIONE XIII.

Se un cilindro è ſegato con un piano parallelo

alle

alle basi, le sue porzioni saranno come i loro assi.

SIccome se nel cilindro fosse inscritto un prisma, la cui base fosse qualsivoglia poligono inscritto nella base cilindrica, segandosi esso ancora con l'istesso piano parallelo alla base, saranno le sue porzioni proporzionali alle lunghezze [a], cioè agli assi cilindrici; così ancora le porzioni cilindriche sono come li detti assi, perchè i cilindri sono, come li prismi di simil base, inscritti ne' medesimi, come altre volte si è dimostrato.

a *Coroll. 2. prop. 25. XI.*

PROPOSIZIONE XIV.

I Coni, e i Cilindri di base uguale sono tra loro, come le altezze.

QUanto a' Cilindri di base uguale, è come se fossero porzioni segate dal medesimo cilindro, col piano parallelo alla base, che però essendo come i loro assi [b], sono come le altezze; e quanto a' conj, che sono un terzo de' cilindri, a' quali sono inscritti [c], è chiaro dover essere ancor essi nell'istessa ragione degli assi.

b 13. XII.

c 10. XII.

PROPOSIZIONE XV.

Tav. XII. FIG. 219.

Ne' coni, o cilindri uguali BAC, EDF, *le basi* BC, EF *sono reciproche all' altezze, cioè come* DM *ad* AL; *e viceversa, qualunque volta siano reciprocamente* BC · EF :: DM · AL, *que' coni, o cilindri saranno uguali.*

SE le altezze cilindriche sono uguali, ancora le basi saranno uguali negli uguali cilindri: essen-

ſendo poi diſuguali, dalla maggiore *DM* ſi tagl la *OM* uguale alla minore *AL*, e ſi tagli il cilindro col piano *IH*, condotto per lo punto dell' aſſe *O*, parallelo alla baſe *EF*. Sarà *DM* · *OM* (= *AL*) :: *NKF* (= *GPC*) · *IHF* [a] :: *BC* · *EF* [b]; dunque *DM* · *AL* :: *BC* · *EF*; e viceverſa ſe *DM* · *AL* :: *BC* · *EF*, poſta *OM* = *AL*, ſarà *NKF* · *IHF* :: *DM* · *OM* (= *AL*) :: *BC* · *EF* :: *GPC* · *IHF*; dunque *NKF* = *GPC*. E l' iſteſſo accade ne' Coni, che ſarebbero la terza parte di eſſi cilindri Dunque ec.

a 14. XII.
b 11. XII.

PROPOSIZIONE XVI.

FIG. 220.

Dati due cerchj concentrici ADB, LME, *inſcrivere nel maggiore un poligono di pari lati, che non tocchi il cerchio minore.*

TIrato pel centro *C* il diametro *ACB*, ſegante il cerchio interiore in *L*, *E*, gli ſi conduca la tangente *GEH* concorrente col maggior cerchio in *G*, ed *H*; indi ſegata la ſemicirconferenza *ADB* in due parti uguali nel punto *D*, ſi feghi pure l' arco *DB* pel mezzo in *N*, e l' arco *NB* dividaſi pel mezzo in *K*, fino a tanto, che queſta diviſione rieſca tra gli punti *G*, e *B*. Tale ſia il punto *K* donde ſi tiri al diametro la perpendicolare *KIF*, che ſarà parallela alla tangente *GEH*, e gli archi *BK*, *BF* ſaranno tra loro uguali, e le corde loro *KB*, *FB* potranno replicarſi intorno la circonferenza del cerchio maggiore, la quale conterrà un numero pari di archi uguali a *BK*; e però ne riuſcirà un poligono di lati uguali, e pari di numero, li quali non po-

potranno toccare la periferia del cerchio interiore, siccome non vien toccata ne meno dalla retta *KF* sottesa a due lati, essendo parallela alla tangente *GH* di quella periferia; il che riuscirà in qualunque altro sito di esso poligono. Il che ec.

PROPOSIZIONE XVII. PROBL.

Date due sfere concentriche, li cui raggi CB, CE, *descrivere nella maggiore un solido poliedro, li cui piani non tocchino la superficie della sfera minore.* FIG. 221.

SEgate esse sfere con un piano, che passi pel centro *C*, ne riusciranno due cerchj concentrici, nel maggiore de' quali può descriversi un poligono, che non tocchi la periferia del minore [a]. Sia *BK* uno de lati di tale poligono; ed eretto perpendicolare al piano di questo cerchio il semidiametro *CA*, si tirino nella sfera li piani *ALK*, *AHB*, che saranno quadranti perpendicolari a quel cerchio [b], ed in essi quadranti si applichino pure le corde KO, *OL*, *LA*, ed *AH*, *HD*, *DB* uguali al lato *BK*, e si congiungano le rette *DO*, *HL*; il che se si facesse da per tutto, ne riuscirebbe un intero poliedro, il quale non toccherà in verun luogo l'interiore superficie della sfera minore *NSME*. Imperocchè, condotte le *OF*, *DI* perpendicolari alle comuni sezioni *CK*, *CB* de' detti quadranti col cerchio *CB*K, le quali saranno parallele ad *AC*, e perpendicolari al medesimo piano circolare, onde parallele tra di loro, ed ancora uguali, perchè ne' triangoli *OKF*, *DBI*, oltre gli angoli retti in *F*, ed *I*, sono uguali

a 16. XI.

b 18. XI.

li gli angoli K, e B, insistenti alle semiperiferie diminuite degli archi uguali OK, DB, e però essendo $OK = DB$, ancora gli altri lati saranno uguali, cioè $OF = DI$, ed $FK = IB$; però congiunte le rette DO, IF, saranno parallele, ed uguali; ma IF è parallela a BK, segando dagli uguali raggi CK, CB le parti uguali FK, IB; dunque ancora DO, e BK sono parallele, e però le rette OK, DB sono nel medesimo piano; e similmente si proverebbe essere un piano $HLOD$, ed il triangolo ALH; onde ciò da per tutto continuato, sarebbe un poliedro inscritto nella sfera maggiore; e tirando dal centro C la perpendicolare CG al piano $BDOK$, congiunte le rette GB, GK, GO, GD saranno uguali, onde passerebbe un cerchio per i quattro punti K, B, D, O, mentre li quadrati di qualunque di tali linee, col medesimo quadrato della perpendicolare CG, fanno il quadrato del raggio della sfera; ma essendo BK maggiore di IF, e però maggiore di DO, e le altre OK, e DB uguali a BK, dunque nel cerchio, che passerebbe per i punti K, B, D, O, la BK sottende più di un quarto, e però il quadrato BK è più che doppio del quadrato GK, essendo l' angolo BGK ottuso; ma congiunta la KI, che sarà perpendicolare ad IB; essendo l'angolo $KBI = DBI$, il lato $BK = BD$, ed il lato BI comune, onde ne' triangoli KBI, DBI, sarà $IK = ID$, e l' angolo BIK uguale al retto BID; ed è la IK maggiore della BI (essendo IK media proporzionale tra le parti del diametro, di cui l' una è BI, l' altra sarebbe $IC + CB$, assai maggiore di IK) dunque il quadrato BK è meno che doppio del quadrato IK; e però la GK è minore

re di *IK*, onde la *CG* sarà maggiore di *CI*, essendo tanto li due quadrati *CG*, e *GK*, quanto li due *CI*, ed *IK* uguali al quadrato del raggio *CK*. Onde è più lontano il punto *G*, che il punto *I* dalla superficie della sfera *CEM*; ed essendo la *IK* lontana dall'arco *EM*, riuscendo parallela alla sua tangente [a], il piano *DBKO* sarà più remoto dalla superficie di quella interna sfera minore, e così ancora gli altri piani *HDOL*, *AHL* molto meno potranno toccare detta superficie, essendone più lontani; e però tutto il Poliedro sarà come cercavasi di fare. Il che ec.

a 16. XII.

PROPOSIZIONE XVIII.

FIG. 221.

Le sfere sono in triplicata ragione de' loro diametri.

IMperocchè fatto ancora nella sfera minore un simile poliedro al descritto nella maggiore, questi saranno in tripla ragione de' raggi delle loro sfere, perchè la piramide, che avesse la base *DBKO*, e la cima in *C*, sarà simile alla piramide, la di cui base è il simile quadrilineo *PEMQ*, e la stessa cima in *C*; e parimente l'altra piramide, la di cui base *HDOL*, è simile alla piramide, la di cui base *RPQS*, colla stessa cima in *C*; e così l'altre; dunque essendo queste in tripla ragione di quella de' loro lati omologhi, ancora la somma di esse, cioè il poliedro della sfera *AKB*, alla somma dell'altre simili, che sarebbe il simile poliedro della sfera *NME*, starà in ragione tripla de' raggi *CB*, *CE*, o de' diametri di esse sfere; e ciò accaderebbe in qualunque numero di piani fossero divisi i po-

liedri similmente descritti in esse sfere; e perchè possono esser fatti di tanti piani, che non tocchino la superficie di qualunque interna sfera minore, ma differente dalla maggiore d'una quantità minima; quindi essi poliedri possono differire dalle dette sfere d'una grandezza minore di qualunque data; però avendo sempre essi poliedri simili la ragione tripla di quei diametri, ancora le sfere saranno nell' istessa ragione [a]. Il che doveva dimostrarsi

[a] *Coroll.* 2. *prop.* 2. XII.

ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA
DI EUCLIDE.
LIBRO XIII.

PROPOSIZIONE I.

FIG. 222.

Se la retta AB *è divisa in* C *secondo l'estrema, e media ragione, al maggiore segmento* CA *aggiunta la* AD *uguale alla metà di tutta la* AB, *sarà il quadrato di essa* CD *quintuplo del quadrato della metà di tutta la* AB.

Mperocchè posta *AF* uguale alla metà di *AB*, e perpendicolare ad essa, congiunta *BF*, e ad *FB* posta uguale *FG*, ed indi dalla porzione *AG* descritto il quadrato *AGIC*, segante la *AB* in *C*, questa è la costruzione, che determina la divisione di *AB* in *C*, in maniera che sia il quadrato

AC

$AC = ABC$, rettangolo di tutta nel resto [a], il che rende segata AB in C secondo l'estrema, e media ragione, per essere AC media proporzionale tra la intera AB, e la residua BC. Dunque essendo GA AC, ed $= AD = AF = \frac{1}{2} AB$, sarà $CD = FG = FB$; ma posta $AF = 1$ ed $AB = 2$, il cui quadrato $= 4$, il quadrato $FB =$ a' quadrati d'AF, e d'$AB = 1 + 4 = 5$; dunque ancora il quadrato CD è quintuplo del quadrato AD, cioè del quadrato della metà di AB. Il che ec.

[a] Prop. 2. lib. 2.

PROPOSIZIONE II.

FIG. 223.

Se la retta CD *ha il suo quadrato quintuplo del quadrato* AD, *posta la* AB *dupla di* AD, *sarà divisa in* C *secondo l'estrema, e media ragione, il di cui maggiore segmento sarà la* AC.

IL quadrato CD è uguale a' quadrati AD, AC, ed a' due rettangoli DAC [b]; dunque essendo $BA = 2\ AD$, sono li due rettangoli $DAC = BAC$, ed essendo il quadrato CD quintuplo del quadrato AD, siccome uguaglia li quadrati AD, ed AC, ed il rettangolo BAC, tolto di comune il quadrato AD, rimarrà il quadruplo del quadrato AD (che è il quadrato di AB doppia di AD) uguale al quadrato AC, ed al rettangolo BAC; ma è uguale al rettangolo $ABC + BAC$; dunque il quadrato $AC = ABC$, e però AC è media proporzionale tra AB, e BC, onde è il maggiore segmento della divisione di AB nell' estrema, e media ragione. Il che ec.

[b] 4. 11.

FIG. 224.

COROLLARIO. Ancora posta dall' altra parte la

AB dupla di *AD*, il cui quadrato uguagli la quinta parte del quadrato *CD*, sarà la *BC* divisa in *A* secondo l'estrema, e media ragione, il di cui segmento maggiore è *BA*; perchè essendo *DC* q. = 5 *AD* q. = *AD* q. + 2 *CAD* + *CA* q., e 2 *CAD* = *CAB* saranno 4 *AD* q. (cioè *AB* q.) = *CAB* + *CA* q. = *BCA*; dunque è chiaro il proposto.

PROPOSIZIONE III.

FIG. 225. *Se il maggiore segmento* AC *della retta* AB *divisa secondo l' estrema, e media ragione, si dividerà per mezzo in* E, *la metà EC del maggiore segmento, col minore segmento* CB, *cioè la* EB, *può un quadrato quintuplo del quadrato* CE.

a 6. 11. IMperocchè il quadrato *EB* è uguale al rettangolo *ABC* col quadrato *CE* [a], ma *ABC* = *AC* quadrato, che è quadruplo del quadrato *CE*; dunque il quadrato *EB* uguaglia il quadrato *CE*, ed il quadruplo di esso, e però è quintuplo del quadrato *CE*. Il che ec.

PROPOSIZIONE IV.

FIG. 226. *Il quadrato di tutta la* AB, *col quadrato di* CB *segmento minore di essa divisa secondo l' estrema, e media ragione, sono tripli del quadrato del segmento maggiore* AC.

b 7. 11. I Due quadrati *AB*, e *BC* sono uguali a due rettangoli *ABC* col quadrato *AC* [b]; ma il rettangolo *ABC* = *AC* quadrato, dunque li due quadrati *AB*, e *CB* sono uguali a' due quadrati *AC* col quadrato medesimo *AC* un altra vol-

ta

ta preso, e però sono uguali al triplo di esso quadrato AC. Il che ec.

PROPOSIZIONE V.

Alla retta linea AB *divisa in* C *secondo l' estrema, e media ragione, aggiunta la* AD *uguale al maggiore segmento* AC, *sarà la* BD *divisa pure in* A *secondo l' estrema, e media ragione, il di cui maggiore segmento sarà l' intera* AB. FIG. 227.

ESsendo AB ad AC, cioè alla AD, come AC, a CB, convertendo sarà $DA \cdot AB :: BC \cdot CA$, e componendo $DB \cdot BA :: BA \cdot AC = AD$, dunque il quadrato $AB = BDA$, e però la BD è divisa in A secondo l' estrema, e media ragione, il di cui segmento maggiore è la AB. Il che ec.

PROPOSIZIONE VI.

L' uno, e l' altro segmento, il maggiore AC, *ed il minore* CB *della retta* AB *proposta, e divisa in* C *secondo l' estrema, e media ragione, sono incommensurabili, non solo in lunghezza, ma ancora in potenza; cioè non sono come numero a numero, nè essi segmenti, ne i loro quadrati.* FIG. 225.

IMperocchè aggiunta al segmento maggiore AC la $AD = \frac{1}{2} AB$, presa $AD = 1$, il quadrato CD è quintuplo di esso quadrato AD [a]; dunque essa $CD = \sqrt{5}$; onde $AC = \sqrt{5} - 1$, e la $BC = DB - DC = 3 - \sqrt{5}$, essendo BD tripla di AD. Ora ne $\sqrt{5} - 1$ a $3 - \sqrt{5}$ può avere alcuna proporzione commensurabile di numero a numero, non potendo determinarsi in numero, nè in frazione di numeri, la radice quadra di cinque

a 1. XIII. 1.

que, non essendo verun quadrato quintuplo d' un altro quadrato; nè il quadrato della prima, che sarebbe $5 - 2\sqrt{5} + 1 = 6 - 2\sqrt{5}$ può essere commensurabile al quadrato dell' altra $= 9 - 6\sqrt{5} + 5 = 14 - 6\sqrt{5}$, non essendo nè meno questi come numero a numero, ma in ragione di $3 - \sqrt{5}$ à $7 - 3\sqrt{5}$ (divisi per mezzo essi quadrati) dunque *AC*, e *CB* sono in lunghezza, ed in potenza incommensurabili. Il che ec.

PROPOSIZIONE VII.

FIG. 229.

Nel pentagono equilatero ABCDE *se vi sono tre angoli, contigui, o non contigui, tra di loro uguali, gli altri angoli pure saranno uguali ad essi.*

Essendo uguali i lati *EA*, *AB*, *BC*, *CD*, se gli angoli contenuti tra essi *A*, *B*, *C* sono uguali, sottese le basi *EB*, *AC*, *BD*, saranno pure tra di loro uguali; dunque gli angoli *AEB*, *CAB*, *ABE*, *CBD*, *BCA*, *CDB* sono uguali; dunque *BF* = *FA* e la rimanente *FE* = *FC*, onde i triangoli *FED*, *FCD* hanno tutti i lati uguali, e però l' angolo *FCD* = *FED*, ed aggiunti gli uguali *AEB*, *ACB*, l'angolo *AED* sarà uguale a *BCD*. Similmente si proverebbe *CDE* = *ABC*; dunque tutti gli angoli del pentagono saranno uguali.

Se poi fossero uguali gli angoli *BCD*, *CDE* al non contiguo *EAB*, riuscendo colle sottese *DB*, *EB* gli angoli *AEB*, *BDC* uguali, e per essere *BE* = *BD*, ancora essendo *BDE* = *BED*, dunque tutto l'angolo *AED* = *CDE*, e però sono ancora tre angoli contigui uguali, onde tutti gli altri sono uguali. Il che ec. PRO-

PROPOSIZIONE VIII.

Nel pentagono equilatero ABCDE, *che ancora sia equiangolo, sottese due rette* BD, CE *a due angoli contigui, si segheranno in* F *secondo l'estrema, e media ragione, ed i loro maggiori segmenti* BF, EF *saranno uguali ad un lato* BC, *ovvero* ED *di esso Pentagono*. FIG. 230.

CIrcoscritto ad esso pentagono un circolo *ABD*, gli archi sottesi da' lati di esso sono uguali; dunque l'angolo *FCD* = *FDC*, e l'esterno *BFC* sarà duplo di ciascuno di essi, cioè = 2 *FCD*; ma essendo pure l'arco *BAE* doppio di *ED*, ancora l'angolo *BCF* = 2 *FCD*; dunque *BFC* = *BCF*; e però *BF* = *BC*; ed essendo gli triangoli *BCD*, *FCD* equiangoli, sarà *BD* · *DC* (= *BF*) :: *DC* (= *BF*) · *FD*; dunque *BD* è divisa in *F* secondo l'estrema, e media ragione, ed il maggiore segmento è *BF* = *BC*; e l'istesso si dimostrerà di *CE*, che sia divisa in *F* in ragione media, ed estrema, essendo *CE* · *EF* :: *EF* *FC*, ed *EF* = *CD*. Il che ec.

PROPOSIZIONE IX.

Se il lato AB *del decagono inscritto nel circolo* ABE *si congiunga col lato dell' esagono uguale a* BD, *cioè al raggio* CA *di esso circolo, sarà segata la* AD *in* B, *secondo l'estrema, e media ragione, il di cui maggiore segmento sarà* BD *uguale al lato dell' Esagono*. FIG. 231.

TIrato il diametro *ACE*, e congiunte le rette *CB*, *CD*, essendo l'arco *AB* la quinta parte

 te

te della semiperiferia ABE, e però BE quadruplo di AB, l' angolo ECB sarà quadruplo di ACB; ma il medesimo ECB è duplo di ABC, ed ABC è duplo di BCD (essendo non solamente $BC = CA$, ma ancora $= BD$, lato dell' esagono) dunque ECB è quadruplo ancora dell' angolo BCD; sarà dunque $ACB = BCD$, e l' angolo $DCA = DAC = ABC$, essendo ciascuno doppio di BCD; però $DC = DA$; ma $DC \cdot CA :: DB \cdot BA$ [a], dunque ancora $AD \cdot DB :: DB \cdot BA$; onde AD è divisa in ragione media, ed estrema, il di cui maggiore segmento è BD. Il che dovea dimostrarsi.

a 3. VI.

PROPOSIZIONE X.

FIG. 232.

Il lato AB *del pentagono* ABDEF *equilatero, ed equiangolo, ha il suo quadrato uguale al quadrato del lato* AH *del decagono inscritto nel medesimo cerchio, ed al quadrato del raggio* CH, *cioè del lato dell' esagono, che s' inscrivesse nel medesimo.*

SI conduca il diametro ACK, il quale dividerà per mezzo l'arco DE in K, e diviso pel mezzo l' arco AH in I, si congiungano al centro IC, e BC. Essendo l' arco $BD = AB$, doppio di AH, o di BH, e DK pure $= AH$, doppio di HI, dunque l' arco BDK è doppio di BHI, però l' angolo $BCK = 2\ BCI = 2\ BAK$; dunque $BCL = BAC$, onde li triangoli ABC, e CBL, che hanno l' angolo B comune, sono equiangoli, e sarà $AB \cdot BC :: BC \cdot BL$, dunque il quadrato di $BC = ABL$. Congiunta pure la retta HL, sarà uguale ad AL, perchè la CI divide la corda AH per mezzo, e ad angoli retti, onde il trian-

triangolo AHL sarà isoscele, simile all'altro HBA, per essere l'angolo $AHL = HAL = ABH$, e l'angolo A comune, dunque $AB \cdot AH :: AH \cdot AL$, e però il quadrato $AH = BAL$; ma il quadrato $AB = ABL + BAL$, dunque è uguale a' quadrati BC, (che è il raggio uguale al lato dell' esagono) ed AH, che è il lato del decagono. Il che ec.

PROPOSIZIONE XI.

Diviso il raggio d'un cerchio CB *in* E *secondo l'estrema, e media ragione, il di cui maggiore segmento sia* CE, *il lato del pentagono regolare da inscriversi in esso cerchio, è medio proporzionale tra il raggio* CB, *e una retta composta da esso raggio, e dal segmento minore,* CB + BE: *che perciò dirassi esso lato del pentagono una* irrazionale minore, *rispetto al raggio preso per razionale.* FIG. 233.

DAl centro si alzi sopra al diametro AB la perpendicolare CD, e si congiunga DE, e prolungata EB in G, sia $BG = CB$. Essendo $AC = BC \cdot CE :: CE \cdot EB$, la somma degli antecedenti $BC + CE$ ($= AE$) alla somma de' conseguenti $CE + EB$ ($= AC$) sarà come un antecedente CB, ovvero AC ad un conseguente CE; dunque ancora la AE è divisa in C secondo l'estrema, e media ragione, essendo $AE \cdot AC :: AC \cdot CE$, ed il segmento maggiore AC essendo il lato dell' esagono da inscriversi in esso cerchio, sarà CE il lato del decagono, il quale è il segmento minore della retta divisa in tale estrema, e media ragione, il di cui maggiore segmento sia il lato dell' esagono [a]; dunque essendo il quadrato DE uguale al quadrato del raggio CD uguale al lato dell' e- a 9. XIII.

sa-

ſagono, ed al quadrato di CE lato del decagono, ſarà DE il lato del pentagono [a]; e perchè CBE $= GBE$, uguaglia il quadrato CE, ed il quadrato BG uguaglia il quadrato DC, ſarà il rettangolo EGB, che $= GBE + BG$ quadrato, uguale a' quadrati CE, e CD, cioè uguale al quadrato DE; dunque il lato DE del Pentagono è medio proporzionale tra BG, e GE, cioè tra il raggio del cerchio, e la retta compoſta del raggio, e del ſegmento minore BE di eſſo raggio CB diviſo in E, ſecondo l' eſtrema, e media ragione. Il che ec. E perciò eſſo lato del Pentagono *è una linea irrazionale minore*, così chiamata da Euclide.

a 10. XIII.

PROPOSIZIONE XII.

TAV. XIII. FIG. 234.

Il quadrato del lato AB *d' un triangolo equilatero* ABD *inſcritto nel cerchio, è triplo del quadrato del raggio* AC.

SI tiri il diametro ACE, e ſi congiunga BE, che ſarà un lato dell' eſagono uguale al medeſimo raggio AC; dunque li due quadrati AB, e BE eſſendo uguali al quadrato del diametro AE, quadruplo del quadrato del raggio AC, tolti li due quadrati uguali BE, AC, rimane il quadrato AB triplo del quadrato AC. Il che ec.

PROPOSIZIONE XIII. PROBL.

FIG. 235.

Nella data sfera ADFC *inſcrivere un Tetraedro, cioè una Piramide compoſta da quattro triangoli equilateri, e dimoſtrare, che il quadrato del diametro* AC *di eſſa sfera è ſeſquialtero del quadrato del lato* AE *di eſſo Tetraedro* AEFG.

Sia

SIa *ADCE* un cerchio massimo della sfera, il di cui diametro *AC* si divida in *B*, di maniera che *BC* sia la sua terza parte; indi per il punto *B* si seghi la sfera col cerchio *GDE* perpendicolare al diametro *AC*, ed in questo cerchio descrivasi un triangolo equilatero *GEF*, indi al vertice *A* si congiungano le rette *EA*, *FA*, *GA*. Questo sarà il Tetraedro ricercato *AEFG*: imperocchè tutti i lati *AE*, *AF*, *AG* sono tra di loro uguali, essendo il quadrato di ciascuno uguale a' quadrati dell' asse *AB*, e del raggio *BE*, ovvero *BF*, o *BG*; ed in oltre ciascuno è uguale a qualsivoglia lato del triangolo equilatero *GEF*, perchè *AC* · *AB* :: *AE* quadrato ad *AB* quadrato, ed *AB* · *BC* :: *AB* quadrato ad *EB* quadrato, dunque per l' ugualità ordinata *AC* · *BC* :: *AE* quadrato ad *EB* quadrato; ma *AC* è tripla di *BC*; dunque il quadrato *AE* è triplo del quadrato *EB*, raggio del cerchio *GDE*; ma del medesimo è triplo il lato *EF* del triangolo equilatero *GFE* [a]; dunque *AE* = *EF*, e così gli altri lati; e però sono tutti equilateri i triangoli *AEF*, *AGF*, *AGE*, *GFE*, onde questo solido è un Tetraedro, ed il quadrato del diametro della sfera *AC* al quadrato del lato *AE* del Tetraedro, è sesquialtero, essendo come *CA* ad *AB*, che è :: 3 · 2. Il che ec.

[a] 12. XIII.

PROPOSIZIONE XIV. PROBL.

FIG. 236.

Nella data sfera ADFB *inscrivere un Ottaedro da otto triangoli equilateri compreso, e dimostrare, che il quadrato del diametro AB della sfera è duplo del quadrato di qualunque lato AE dell' Ottaedro* AEBFDG.

Nel

NEl cerchio massimo *ADBE* tirati li due diametri *AB*, *DE* tra di loro perpendicolari, si tiri ancora *FCG* perpendicolare al piano di esso, per cui, e per *DE* passerà un altro cerchio massimo *DFEG* perpendicolare all' altro, e congiunte le rette *AD*, *AF*, *AG*, *AE*, *BD*, *BF*, *BG*, *BE*, saranno tutte tra di loro uguali, perchè i loro quadrati uguagliano li due quadrati de' raggi, tirati dal centro a' loro termini, che tra di loro disposti sono ad angolo retto; e congiunte ancora le rette *FE*, *EG*, *GD*, *DF*, saranno uguali all' altre, perchè pure i loro quadrati sono uguali a' due quadrati de' raggi, al di cui angolo retto si oppongono; tutti adunque li triangoli *AFE*, *BEF*, *AFD* ec. sono equilateri, come ancora si raccoglie dall' essere ciascun lato la corda sottesa ad un quarto della periferia del massimo cerchio; che però il solido *AEBFDG* è un ottaedro, ed il quadrato del diametro *AB* è duplo del quadrato del lato *EA*, essendo a due quadrati *EA*, *EB* uguale, li quali sono uguali tra loro. Il che ec.

PROPOSIZIONE XV. PROBL.

FIG. 237.

Nella data sfera inscrivere un Cubo, da sei quadrati compreso ANFOIDKB, *e dimostrare, che il quadrato del diametro* DF *della sfera sia triplo del quadrato di qualunque lato* AD *di esso cubo.*

NEl massimo cerchio *ABH* tirato qualunque diametro *FD*, si prenda *DE* uguale a un terzo di esso, ed eretta la perpendicolare *EA*, congiunte le rette *AD*, *AF*, e compiuto il rettangolo *AFBD*, si seghi la sfera con due piani per-

perpendicolari a quel cerchio *ABH*, tradotti per le rette *AF*, *DB*, che faranno due cerchj uguali *ANFO*, *DKBI*, intorno agli uguali diametri *AF*, *DB*, a' quali si tirino gl' altri diametri *OGN*, *ILK* perpendicolari, che li seghino ad angoli retti, e tirate le corde *AN*, *NF*, *FO*, *OA*, e *DK*, *KB*, *BI*, *ID*, sottoposte ad uguali quadrati, e però uguali tra loro, si congiungano le altre rette *NK*, *OI*, uguali pure all' altre *AD*, *FB*; sarà questo il Cubo ricercato; perchè essendo *FD* tripla della *DE*, ed il quadrato *FD* al quadrato *AD*, come *FD* a *DE*, sarà il quadrato *DF* (cioè gli due *AF* ed *AD*) = al triplo del quadrato *AD*, e però il quadrato *AF* duplo sarà del quadrato *AD*; ma l' istesso quadrato *AF* è duplo del quadrato *AN*, essendo uguale alli due *AN*, *NF* tra di loro uguali; dunque *AD* è uguale ad *AN*, e però tutte le rette, che comprendono questo solido, sono uguali, e costituiscono sei quadrati *ADKN*, *NKBF*, *FBIO*, *OIDA*, *AOFN*, *DKBI*, uguali, che contengono questo Cubo, e qualunque di tali quadrati è la terza parte del quadrato del diametro della sfera, essendo il quadrato *DF* triplo del quadrato *AD*. Il che ec.

COROLLARIO. Essendo il quadrato del diametro della sfera al quadrato del lato dell' inscritto Tetraedro in ragione sesquialtera [a], cioè come 3 a 2; e lo stesso quadrato del diametro al quadrato del lato del cubo, come 3 ad 1; dunque il quadrato del lato del Tetraedro, col quadrato del lato del cubo, è uguale al quadrato del diametro della sfera, essendo 2 + 1 = 3.

[a] 13. XIII.

PRO-

PROPOSIZIONE XVI. PROBL.

FIG. 238. *Nella data sfera inscrivere un Icosaedro, compreso da venti triangoli equilateri uguali, e dimostrare, che il diametro della sfera al lato dell' Icosaedro, stà come la somma del lato dell' esagono, e di due lati del decagono al lato del pentagono inscritto nel medesimo cerchio, perlochè chiamasi esso lato dell' Icosaedro da Euclide una* linea Irrazionale minore.

SIa *CI* media proporzionale tra il raggio *CA* della sfera, e la quinta parte di esso, ed eretta sopra al diametro *AB*, nel cerchio massimo *AEF* la perpendicolare *OID*, per lo centro *C* condotto l'altro diametro *DCF*, si conduca *FME* parallela ad *OID*, e per queste rette *DO*, *EF* si seghi la sfera con due piani perpendicolari a quel massimo cerchio, che faranno due cerchj uguali *DKOP*, *ERFQ*, ugualmente distanti dal centro *C*, essendo $CI = CM$. Indi in questi cerchj si descrivano da' punti opposti *D*, *F* li pentagoni *DKHLP*, *FRGNQ*, e di poi si congiungano le rette *AD*, *AK*, *AH*, *HF*, *HR*, *RK*, *GD*, *DN*, *NB*, *BG*, *BR*, *BF* ec. ne riusciranno quindi venti triangoli equilateri, che comprenderanno il proposto Icosaedro. Imperocchè si congiungano ancora le rette *GE*, *NE*, *DE*. Essendo *IC* media proporzionale tra il raggio *CA*, ovvero *CD*, e la quinta parte di esso, sarà il quadrato *CD* del quadrato *CI* quintuplo, e però *DI* quadruplo dello stesso *CI*, di cui pure è quadruplo il quadrato della dupla *IM*, ovvero *DE*; però $DI = IM$, e *DIME* è un qua-

quadrato; ed essendo *GE* la metà dell'arco *GEN* sottoteso dal lato del pentagono *GN*, sarà *GE* un lato del decagono inscritto nel medesimo cerchio *ERFQ*, e *DE* essendo uguale a *EM* raggio di esso, o lato dell'esagono, che si potrebbe inscrivere nel medesimo cerchio, saranno li due quadrati *DE*, *EG*, cioè il quadrato del lato *DG* (essendo *DEG* angolo retto, per essere *DG*, ed *IM* perpendicolari al piano del cerchio *ERQ*) uguale al quadrato del lato del pentagono *GN* [a]; pertanto le rette *DG*, *GN*, *DN* sono uguali, e però il triangolo *DGN* è equilatero, e così tutti gli altri triangoli intercetti fra li due circoli *DHP*, *ERQ*, congiungenti gli angoli de' pentagoni inscritti in essi, sono equilateri tutti tra loro uguali. Che poi ancora li triangoli *BRF*, *BRG*, *AHK* ec. siano equilateri uguali agli altri, si prova, perchè essendo il quadrato *CD* quintuplo del quadrato *CI*, e la *MI* dupla di *CI*, sarà la *MA* divisa in *I* secondo l' estrema, e media ragione [b], il di cui maggiore segmento essendo *MI* uguale al raggio *ID* del cerchio *DHL*, il segmento minore *IA* sarà uguale al lato del decagono [c], siccome *MI* uguaglia quello dell' esagono; dunque il quadrato *AD* essendo uguale a' quadrati *DI*, ed *AI*, è uguale a' quadrati del lato dell'esagono, e del decagono, e però uguaglia il quadrato del lato *DK* del pentagono [d]; e così ancora gli altri lati *AK*, *AH*, *BN* ec. sono uguali a' lati di essi pentagoni; onde fanno da per tutto li triangoli equiangoli; e però il solido da essi compreso è l' Icosaedro, come era proposto, ed è manifesto, essere il diametro *AB* della sfera $= IM + AI + MB$, uguale

a 10. XIII.

b Coroll. prop. 2. XIII

c 9. XIII.

d 10. XIII.

guale al lato dell'esagono con due lati *AI*, ed *MB* del decagono inscritto nel cerchio *DHL*, ed il lato dell' Icosaedro è il lato del pentagono inscritto in esso Il che era da dimostrarsi.

PROPOSIZIONE XVII. PROBL.

FIG. 239. *Nella data sfera inscrivere un Dodecaedro contenuto da dodici pentagoni, il di cui lato si dimostri essere un* Residuo Irrazionale, *come Euclide lo chiama, perchè sta al diametro della sfera, come il lato d' un triangolo equilatero al lato del decagono inscritto nel medesimo cerchio.*

SI dividano per mezzo in *LKH* i lati *CB*, *DE*, *DC* di un cubo *BCDAM* da inscriversi nella medesima sfera, e congiunta l' *LK* divisa altresì per mezzo in *N*, si congiunga *HN*, e segate ambedue le rette *NL*, *NK*, secondo la media, ed estrema ragione, di cui i segmenti *NP*, *NO* siano li maggiori, ed alzata al piano del quadrato *BCDE* dal punto *N* la perpendicolare *VN* = *NP*, e condotta per lo punto *V* la *SVR* parallela ad *LK*, si tirino nel piano *RVN* le rette *OR*, *PS* parallele, ed uguali ad *NV*, e prolungata *VN* in *Z*, posta *NZ* = *PL*, nel piano *VNH* si tiri *ZT* parallela ad *NH*, e congiunta *VH*, conveniente colla *ZT* in *T*, siano tirate le rette *TD*, *DR*, *TC*, *CS*, e così sarà fatto un pentagono regolare *SRDTC*, li cui angoli giungeranno alla superficie sferica circoscritta a quel cubo, ed è nel piano delle due rette *SR*, *CD* tra di loro parallele, come parallele alla terza *LK*. E quanto all' ugualità de' lati si pro-

CP, il suo quadrato uguaglia

glia li due quadrati CL, LP, onde essendo $CL = NL$, ed LP il minore segmento di essa LN, divisa secondo l'estrema, e media ragione, sarà il quadrato CP triplo del quadrato PN[a], ed aggiunto il quadrato $PS = PN$, sarà il quadrato CS quadruplo dell' altro PN, e però $PS = PO = SR$. Similmente DR si proverà uguale alla SR. Che poi ancora DT sia uguale ad SR, tirata HQ parallela ad NZ, gli sarà uguale, ed essendo $HQ \cdot QT :: VN \cdot NH :: PN \cdot NL :: LP \cdot PN :: NZ\ (= HQ) \cdot VN$, dunque $QT = VN$, ed il quadrato HT uguaglia li quadrati HQ, e QT, dunque uguaglia li quadrati LP, PS, ed aggiunto il quadrato di $HC = CL = LN$, sarà il quadrato $CT =$ a' quadrati PL, LC, e PS, e però lo stesso CT è uguale al quadrato CS, che ad essi è uguale. Similmente il quadrato DT è uguale a CS; dunque tutti i lati del pentagono si provano uguali. Ancora gli angoli sono uguali, perchè essendo NL divisa secondo l' estrema, e media ragione in P, aggiuntovi $NO = NP$ maggiore segmento, sarà ancora OL divisa in N secondo l' estrema, e media ragione[b], il di cui maggiore segmento sarà NL, ed $NO = OR$ il minore; dunque li due quadrati LO, OR sono il triplo del quadrato NL[c], ed aggiunto il quadrato $LC = NL$, sarà la somma de' quadrati OL, OR, LC, cioè OR, ed OC, o pure il quadrato CR uguale a 4 quadrati NL, cioè al quadrato LK, ovvero CD; dunque $CR = CD$, e lo stesso si dimostrerebbe di DS; però li triangoli CSR, CTD, DRS, essendo tutti i lati dell' uno uguali a' lati dell' altro, e le basi uguali, ave-

a 4. XIII.

b 5. XIII.

c 4. XIII.

ranno gli angoli uguali; onde ancora gli altri due angoli del pentagono ſono uguali a qualunque di queſti tre [a], però queſto Pentagono è regolare. E perchè il centro della sfera X è nel mezo del cubo inſcritto in eſſa, ſarà $XN = LN$, ed $NV = NP = NO$, dunque XV è pure diviſa in N ſecondo l' eſtrema, e media ragione, il di cui minore ſegmento è $NV = VR$, onde li due quadrati XV, VR, cioè il quadrato XR è triplo del quadrato XN [b], onde XR è uguale al raggio della sfera, perchè il ſuo quadrato è triplo del quadrato della metà del lato cubico, ſiccome il quadrato del diametro è triplo del quadrato dell' intero lato di eſſo cubo [c]; e ſimilmente XT è uguale al raggio della sfera, eſſendo il punto T vertice del triangolo CTD ugualmente alto ſopra il quadrato del cubo $CDAG$, come il punto R, vertice dell' uguale triangolo DRE, è alto ſopra l' altro quadrato $CDEB$, cui ugualmente s' inclina eſſo triangolo, eſſendo ne' triangoletti HQT, ROK, il lato HQ ($= NZ$) $= OK$, ed il lato $QT = OR$, intorno ad angoli retti HQT, KOR, e però $HT = KR$, e l' angolo $THQ = RKO$; onde tutte le diſtanze degli angoli del pentagouo $RDTCS$ dal punto X eſſendo uguali a' raggi della sfera, tutto il dodecaedro compreſo da queſti dodici pentagoni, che ſi deſcriverebbero ſopra i dodici lati del cubo, come queſto è deſcritto ſopra CD, in modo che il lato del cubo ſia la corda ſotteſa ad un angolo di eſſo pentagono, reſterà inſcritto nella medeſima sfera; il quadrato del cui diametro eſſendo triplo del quadrato del lato del cubo [c], come il quadrato

a 7. XIII.

b 4. XIII.

c 15. XIII.

to del lato d'un triangolo equilatero è triplo del quadrato del lato dell'esagono [a]; ed il quadrato del lato del cubo *LK* al quadrato del lato del pentagono *SR*, essendo, come il quadrato *NK* al quadrato *NO*, o come il quadrato *NO* al quadrato *OK* (per essere in estrema, e media ragione divisa *NK* in *O*, ed *NO* il segmento maggiore, *OK* il minore) o come il quadrato dell'esagono al quadrato del decagono (essendo il lato dell'esagono al lato del decagono, come il maggiore segmento al minore della retta divisa in estrema, e media ragione [b]) dunque per l'ugualità ordinata il quadrato del diametro della sfera al quadrato del lato *SR* del dodecaedro è come il quadrato del triangolo equilatero, al quadrato del lato del decagono; e così il diametro della sfera al lato del dodecaedro, è come un lato del triangolo equilatero a quello del decagono inscritto nel medesimo cerchio. Il che ec.

a 12. XIII.

b 9. XIII

PROPOSIZIONE XVIII. PROBL.

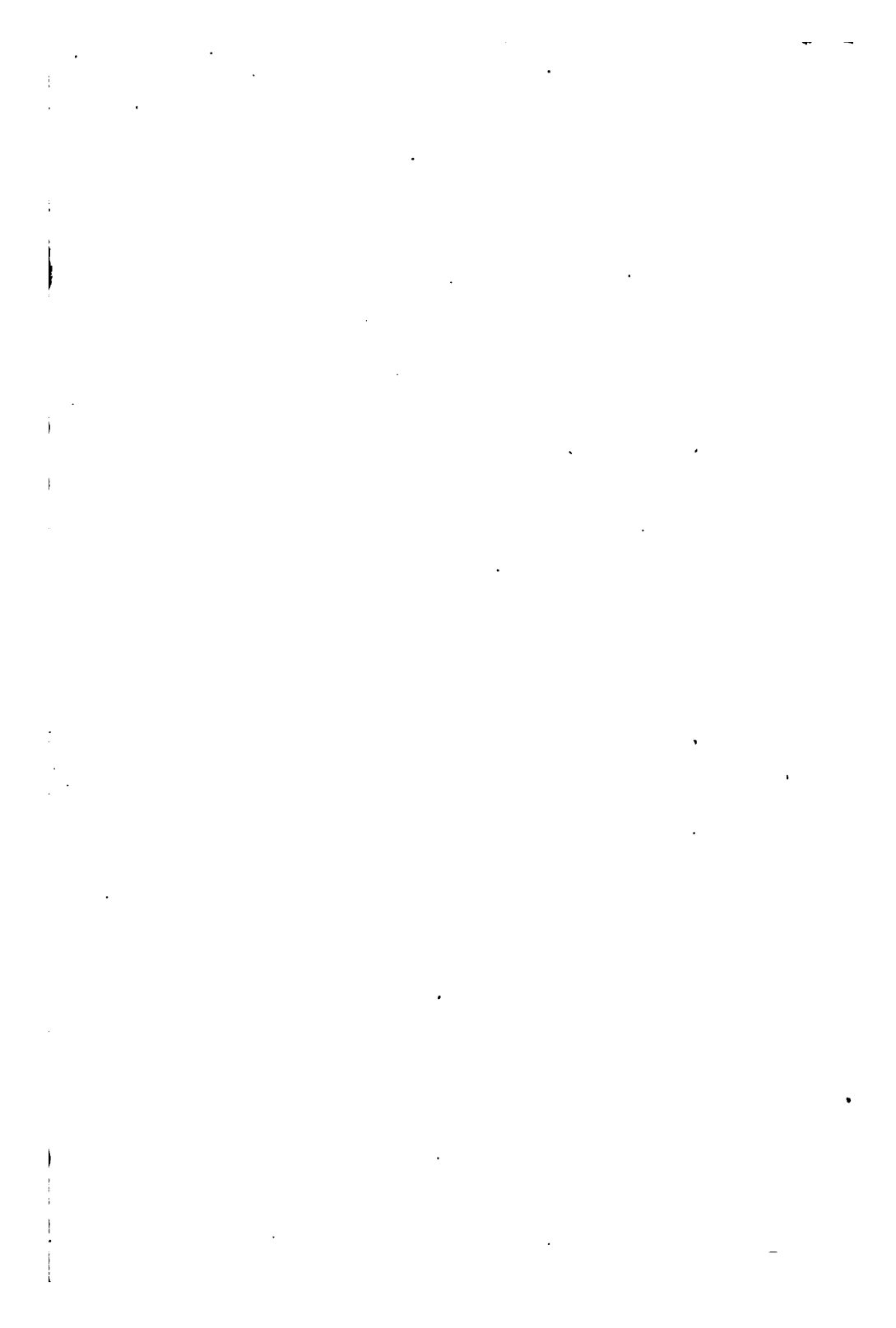
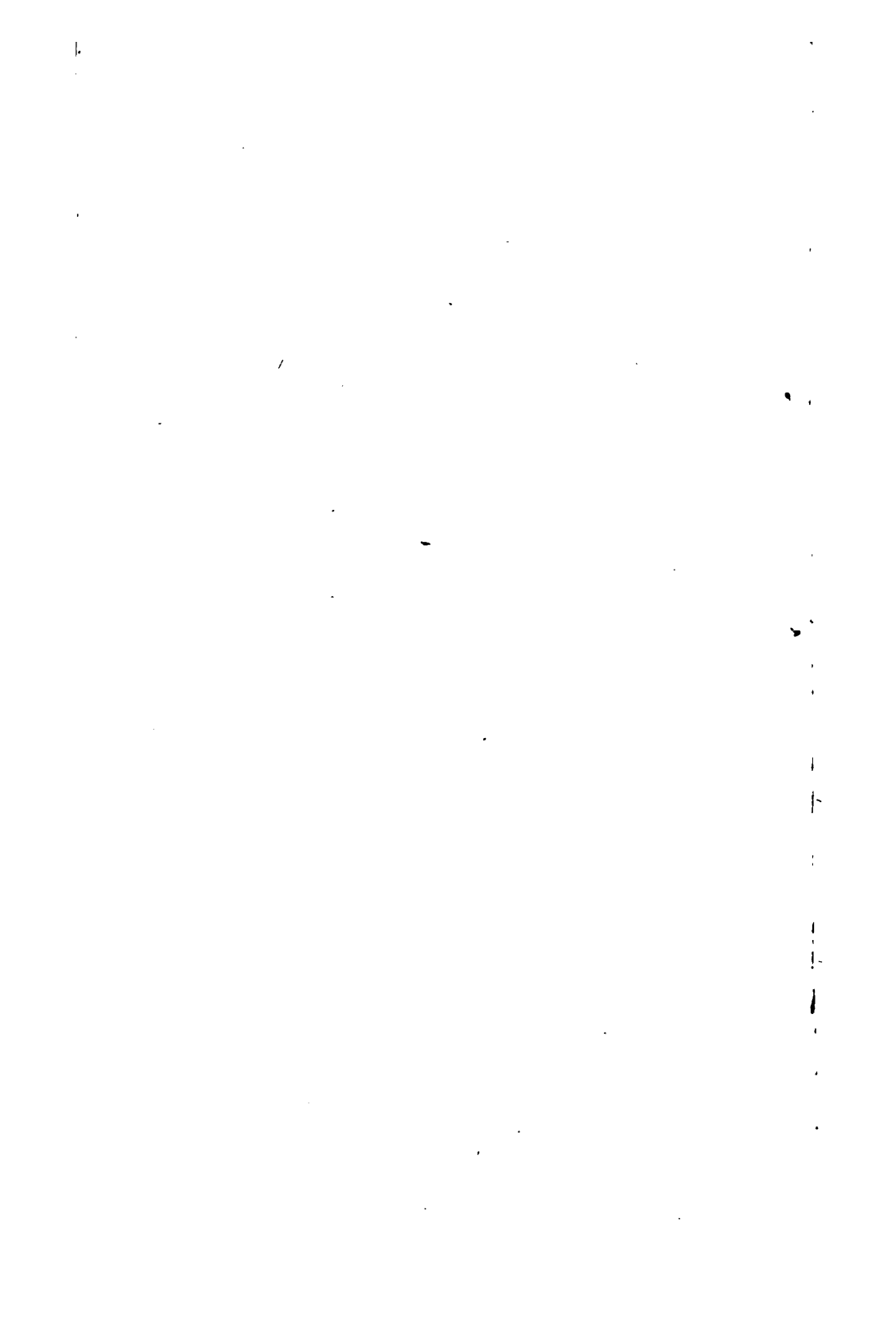
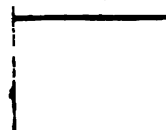
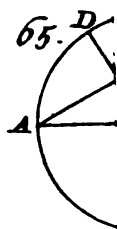
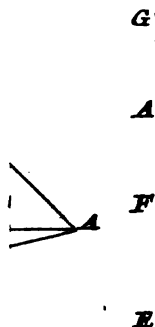
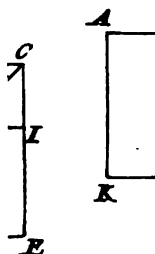
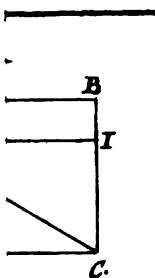
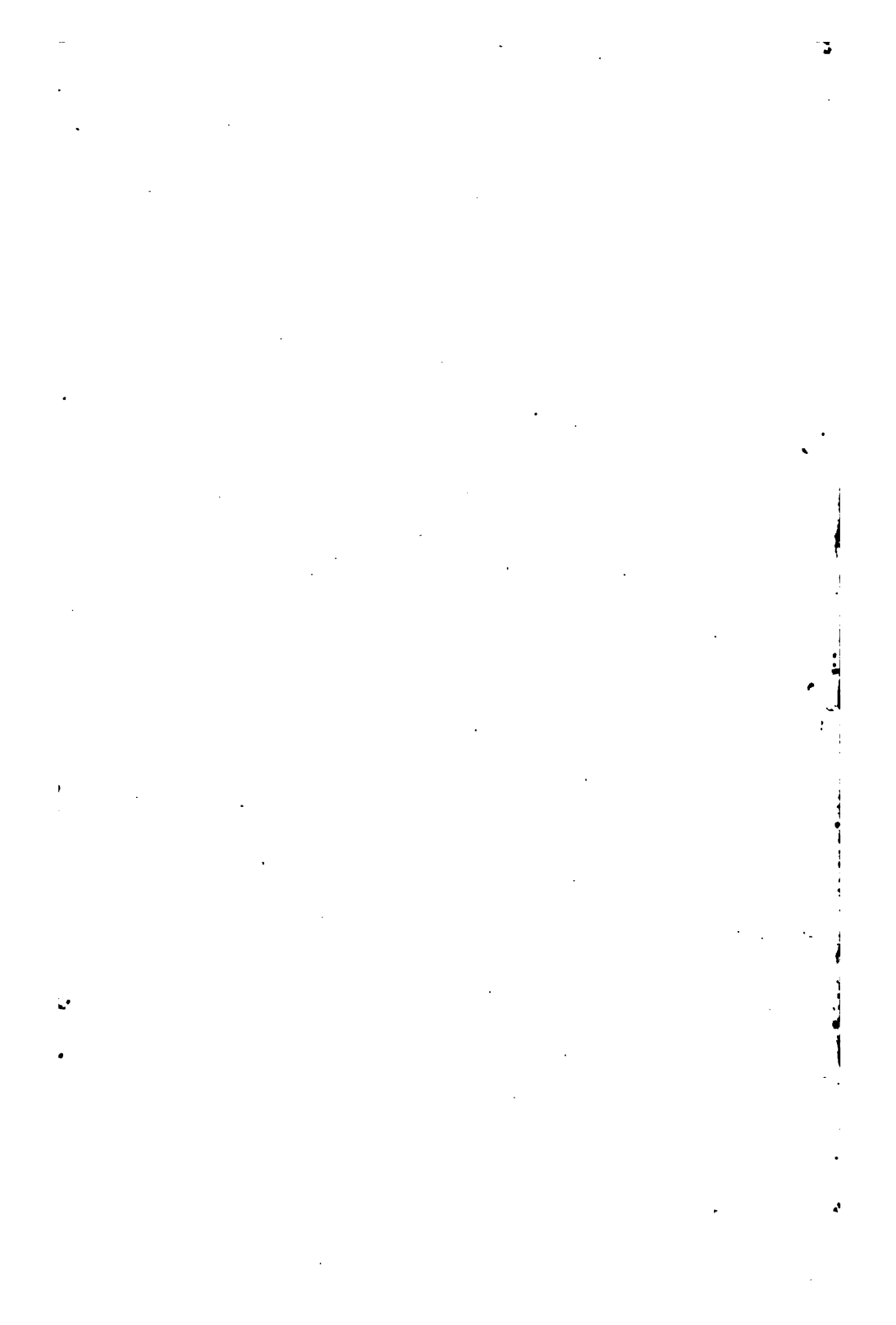
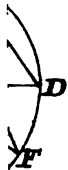
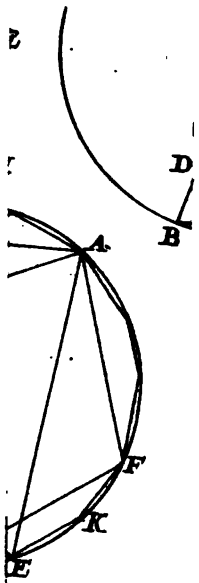
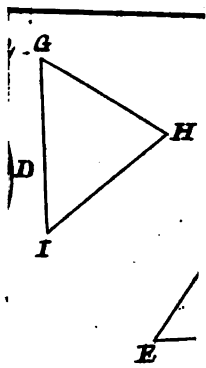
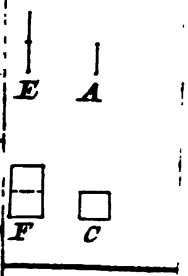
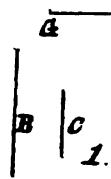
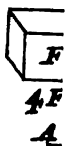
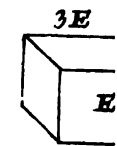
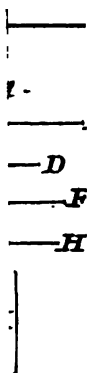
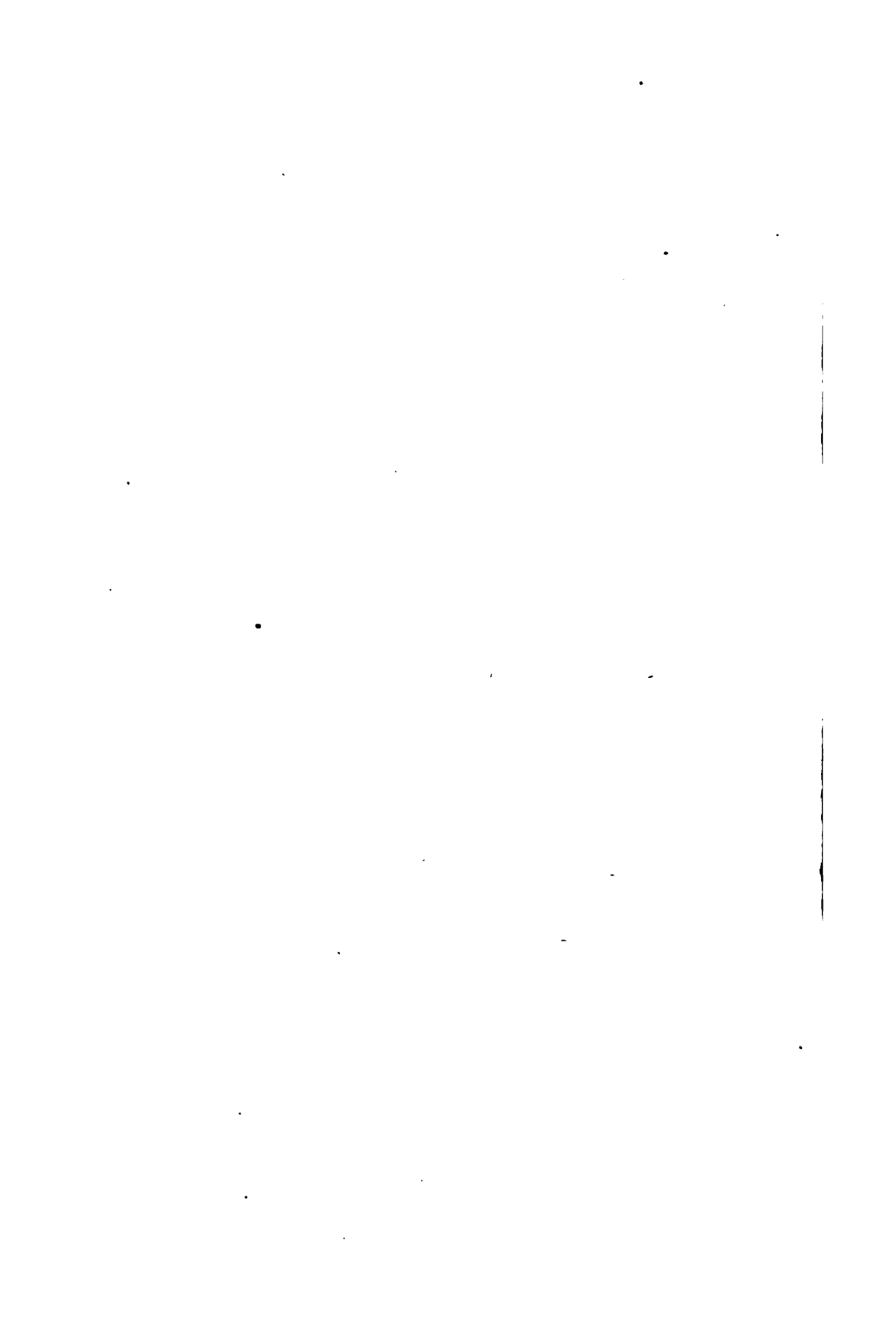
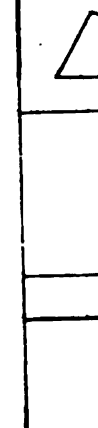
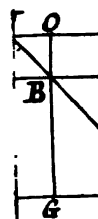
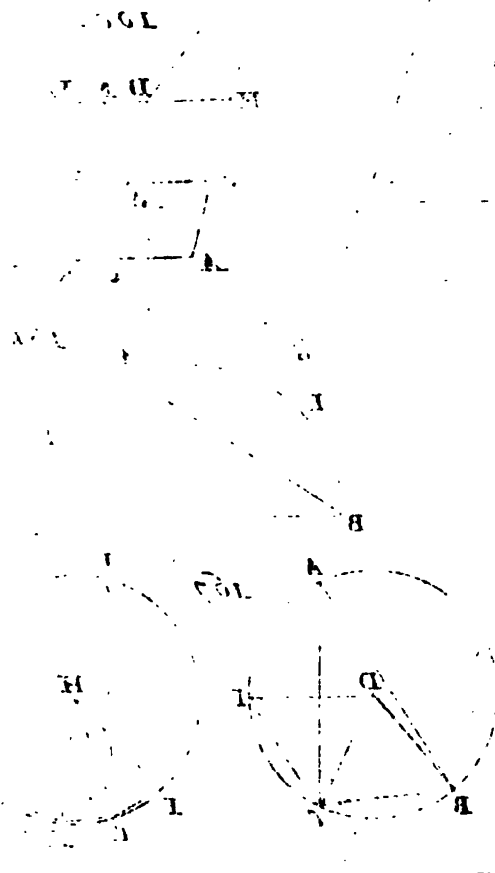
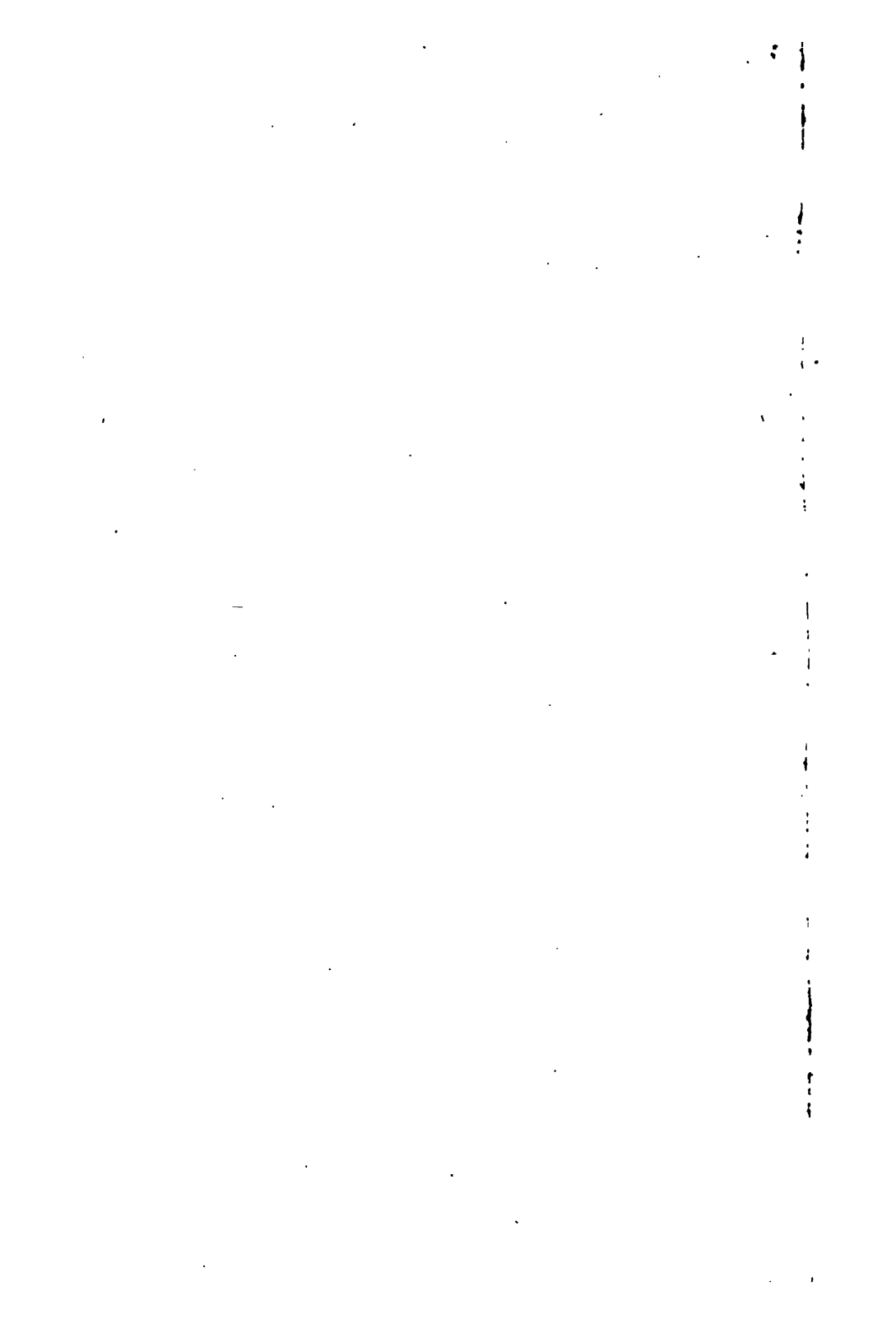
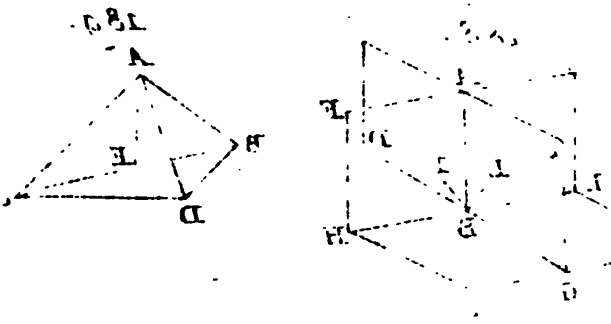
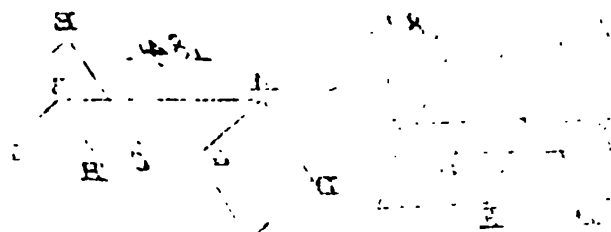
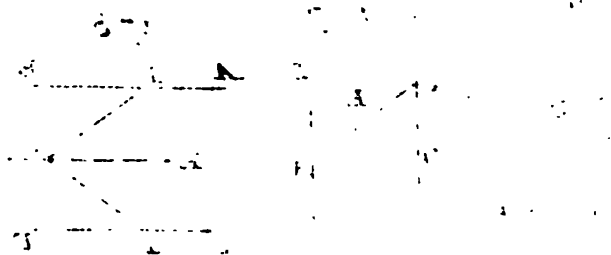
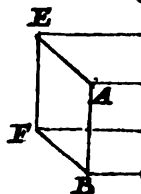
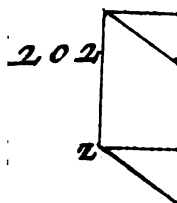
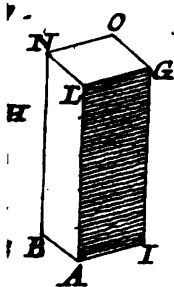
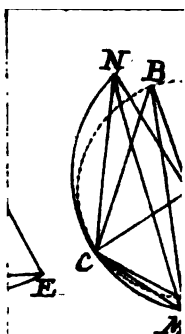
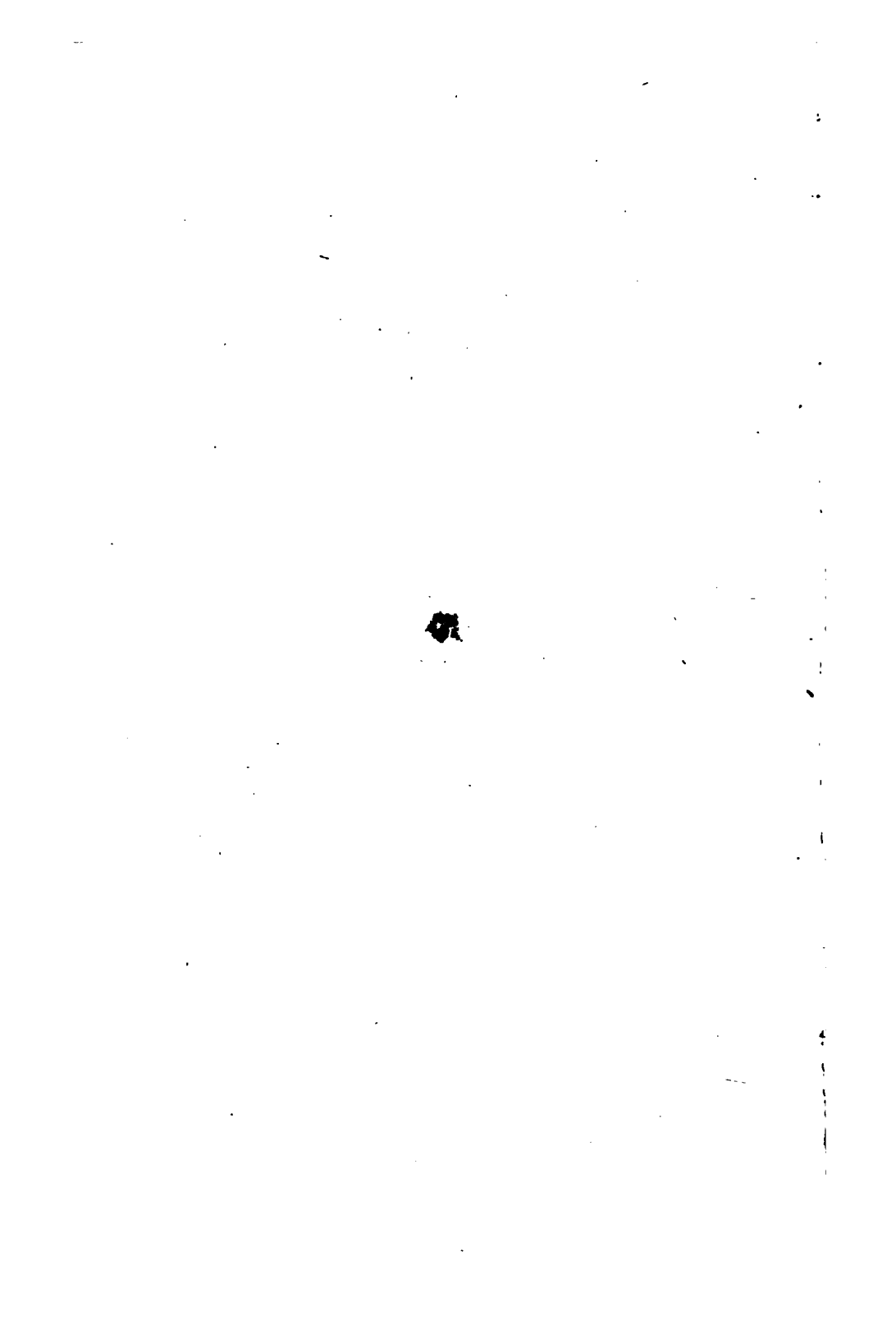
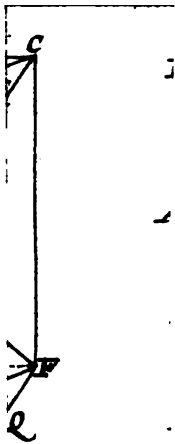
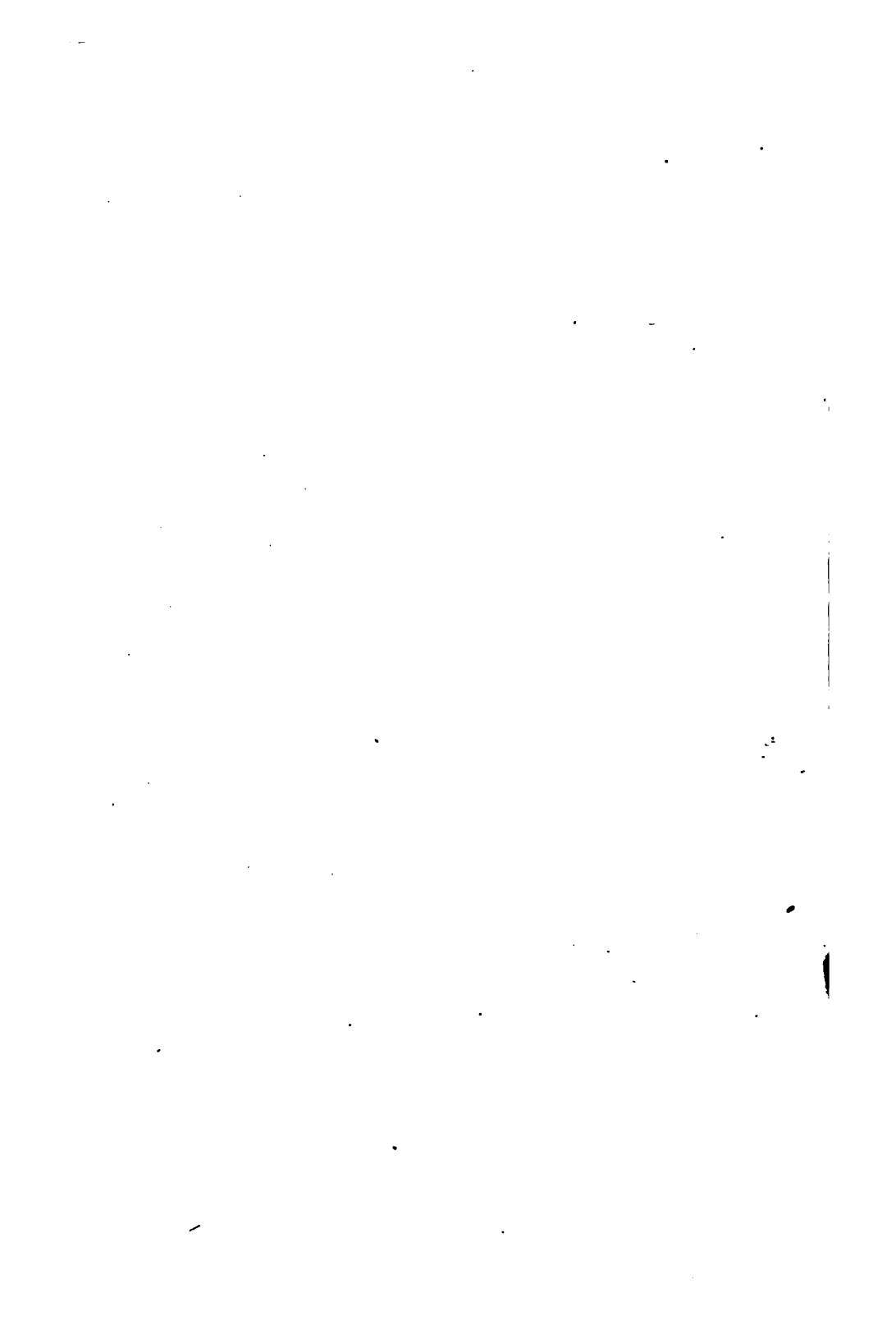
FIG. 240.

Esporre tutti i lati delle passate cinque figure solide, e paragonarle tra loro.

SIa *AHB* un semicircolo massimo della sfera, e al diametro *BA* eretta la perpendicolare *AE* uguale ad esso diametro, dal centro *C* si tiri la *CE*, segante le periferia in *D*, e si tiri la *DI* perpendicolare al diametro, e presa $BF = \frac{1}{3}$ di *AB*, si alzino le perpendicolari *FG*, *CH*, e si congiungano le rette *AD*, *AH*, *AG*, *BG*, e questa dividasi in *K*, secondo l'estrema, e media ragione.

Essendo 3 . 2 :: AB . AF :: AB q. AG q, sarà AG il lato del Tetraedro [a]; ed essendo 2 . 1 :: AB . AC :: AB q. AH q., sarà AH il lato dell' ottaedro [b], ed ancora 3 . 1 :: AB . BF :: AB q. BG q., dunque BG è il lato del Cubo [c]; ed essendo AE dupla di AC, sarà ancora DI dupla di CI, e però il quadrato DI è quadruplo del quadrato CI, onde li due quadrati DI, CI, cioè il quadrato del raggio CD, o vero CA è quintuplo del quadrato CI; onde essendo CI media proporzionale tra il raggio CA, e la quinta parte di esso, eretta la perpendicolare DI, e congiunta la AD, sarà questa, per la costruzione della Proposizione 16. il lato dell' Icosaedro; ed essendo BK la maggior porzione di BG segata secondo l' estrema, e media ragione, sarà essa BK il lato del dodecaedro [d]. Dunque essi lati AG, AH, BG, AD, BK, sono i lati delle cinque figure solide inscritte nell' istessa sfera; e presa $AB = \sqrt{60}$, saranno $AG = \sqrt{40}$; $AH = \sqrt{30}$; $BG = \sqrt{20}$; $AD = \sqrt{30 - \sqrt{180}}$ (perchè $AC = \sqrt{15}$, e $CI = \sqrt{3}$ essendo il suo quadrato la quinta parte del quadrato AC, quarta parte del quadrato AB; onde $AI = \sqrt{15} - \sqrt{3}$, però il suo quadrato $= 15 + 3 - 2\sqrt{45} = 15 + 3 - \sqrt{180}$. ed aggiunto il quadrato $DI = 12$, à $AD = \sqrt{30 - \sqrt{180}}$) e finalmente $BK = 5 - \sqrt{5}$: imperocchè, essendo $BG = \sqrt{20}$, la quale $= 2\sqrt{5}$ e chiamando il maggiore segmento $BK = x$, sarà $2\sqrt{5} \cdot x :: x \cdot 2\sqrt{5} - x$, e però $x^2 = 4 \times 5 - 2\sqrt{5}\,x = 20 - 2\sqrt{5}\,x$, e trasportando quest' ultimo termine, ed aggiungendo dall' una, e dal-

a 13. XIII.
b 14. XIII.
c 15. XIII.
d 17. XIII.

e dall'altra parte il quadrato di $\sqrt{5}$, sarà $xx + 2\sqrt{5}\,x + 5 = 25$, e prese le radici $x + \sqrt{5} = 5$, dunque x, cioè $BK = 5 - \sqrt{5}$, il di cui quadrato essendo $25 + 5 - 10\sqrt{5} = 30 - \sqrt{500}$, però esso lato $BK = \sqrt{30 - \sqrt{500}}$.

IL FINE.

65.

D

F

7.6

B

A

8.

A

G
H
D
I
E
D
B
A
F
K
E
108
E
A
F
C

3E

E

F

4F

A

G

B

C

1.

E

F

3 C

C

F

F

153.

E

H

57.

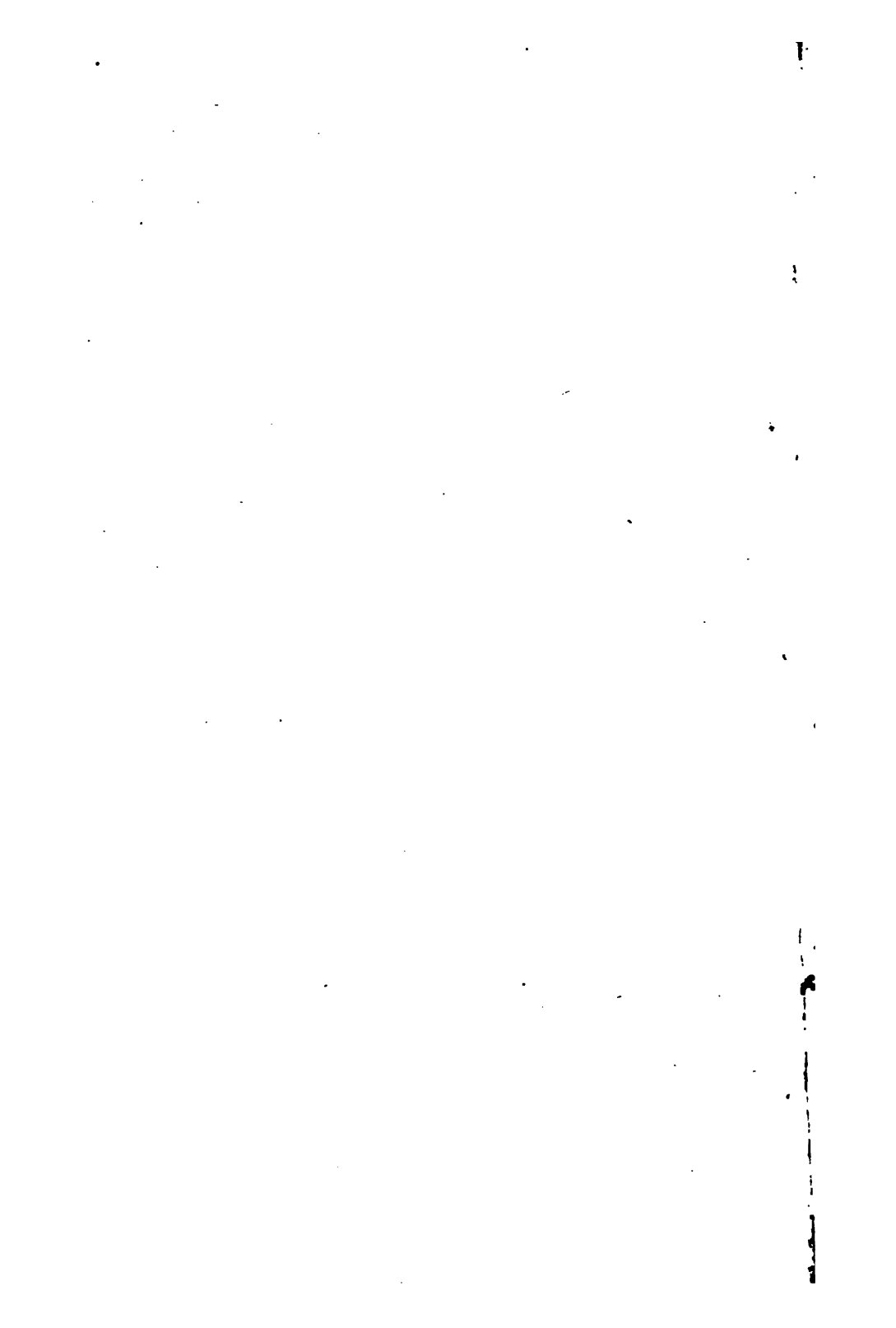
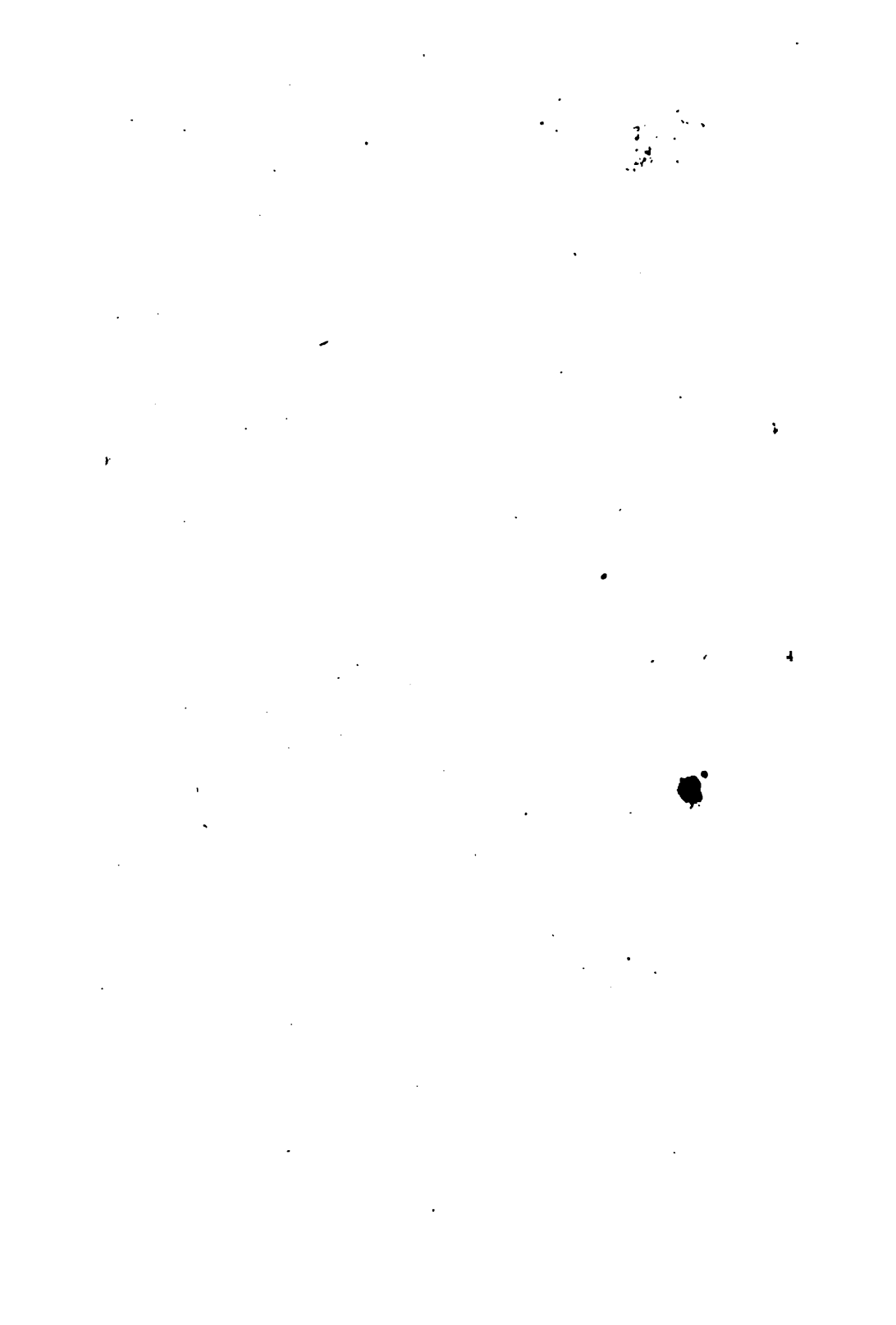
C

O

B

G

N
B
C
E
M
O
N
G
L
H
B
A
I
202
Z
E
A
F
B
E

235
G
E
M
F

INSTITUZIONI
DI ARITMETICA PRATICA

DEL REVERENDISS. PADRE ABATE

D. GUIDO GRANDI

CAMALDOLESE

PROFESSORE DI MATEMATICA
NELL' UNIVERSITA' DI PISA.

IN FIRENZE NELLA STAMPERIA DI S. A. R.

Per Gio: Gaetano Tartini, e Santi Franchi

CON LICENZA DE' SUPERIORI MDCCXXXX.

INSTITUZIONI DI ARITMETICA PRATICA

CAPITOLO PRIMO.

Del modo di numerare, e di rilevare qualunque numero, e come si descrivano.

L modo comunemente tra noi praticato di numerare, procede per la proporzione decupla; di manierachè giunti dall' unità al numero decimo, si replicano altre unità sopra alla decina, che diventa il numero vigesimo; e soggiungendo poscia altre unità, ne proviene il numero trentesimo; e così di mano in mano, come prescrive l' uso ordinario, si accresce altre dieci unità, e si viene al numero quadragesimo, e così pure al cinquantesimo, indi al sessagesimo, poscia al settantesimo, e quindi all' ottantesimo, e susseguentemente al novantesimo, e con l' altra decina di unità si giunge al centesimo, che ha dieci volte compresa la decina. Poscia questi centesimi replicati pure dieci volte, fanno il millesimo, e questo millesimo altre mille volte accresciuto fa il millione, *ec.*

Quindi fu instituito, che nel rappresentare i medesimi numeri si adoperassero questi dieci caratteri, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. de' quali i primi nove significano altrettante unità raccolte per ordine, e l' ultimo, cioè la cifra, che per se sola

nulla ſignificherebbe, ſerve però di riempimento, per denotare in qual poſto ſiano collocate le note ſignificative, che la precedono, augumentandone il valore ſecondo la progreſſione decupla; onde ſcrivendo 10 ſi viene a denotare una decina, e ſcrivendo 20 ſi eſprimono due decine, che diconſi venti; e così 30 ne importa tre decine, che ſono il trenta, e così di mano in mano le altre decine ſimilmente ſi eſprimono; ma quando ſi arriva a dieci decine, ſi deſcrive 100, che è il cento; ed il doppio di ciò, che ſaranno venti decine, ſi eſpone 200 il che è dugento; e così 300 è il trecento; e di mano in mano con altre note procedeſi ad altriținteſimi, li quali ſe ſono dieci, ſi deſcrive 1000, che importa cento decine, cioè il mille; e 2000 importa dugento decine, che ſono due mila; e così l'altre.

Dal che ne avviene, che nelle note numeriche biſogna avvertire il poſto in cui ſono collocate; imperocchè l'ultima nota, che rieſce dirimpetto alla deſtra di chi legge, ſignifica le ſemplici unità, e l' antecedente verſo la ſiniſtra ne raſſegna le decine delle unità, e quella che precede queſta ne importa le centinaia, e l' altra nota antecedente le migliaia; e così di mano in mano qualunque figura anteriore moltiplica per dieci il ſignificato, che averebbe avuto nel poſto ſuſſeguente, come ſi apprenderà nella ſeguente tavola, in cui ho eſpoſto un numero a capriccio di ventotto note, le quali dalla deſtra alla ſiniſtra ſi poſſono dividere con alcune virgole di tre in tre, per diſegnare le centinaia, le decine, e le unità; ed ancora al di ſopra vi ho poſte alcune ſtellette,

lette, che le distinguono di sei in sei, li quali diconsi i millioni, e i millioni de' millioni (che possono dirsi *Billioni*) e li millioni di millioni di millioni (che si chiamano ancora *Trillioni*) ed ancora li millioni de' millioni, de' millioni, de' millioni (che possono dirsi *Quadrillioni*) ed accennasi appresso a ciascuna nota la denominazione, che gli conviene nel posto, in cui si trova.

2,854˙021,354˙791,256˙402,314˙574,286

Unità
Decine
Centesimi
Millesimi
Decine di Millesimi
Centinaia di Millesimi
Millioni
Decine di Millioni
Centinaia di Millioni
Migliaia di Millioni
Decine di Migliaia di Millioni
Centinaia di Migliaia di Millioni.
Millioni di Millioni (o dicansi Billioni)
Decine di Billioni
Centinaia di Billioni
Migliaia di Billioni
Decine di Migliaia di Billioni
Centinaia di Migliaia di Billioni
Trillioni
Decine di Trillioni
Centinaia di Trillioni
Migliaia di Trillioni
Decine di Migliaia di Trillioni.
Centinaia di Migliaia di Trillioni
Quadrillioni
Decine di Quadrillioni
Centinaia di Quadrillioni.
Migliaia di Quadrillioni.

E così se fosse più lungo il numero, vi sarebbero ancora Quintillioni, Sestillioni, Settillioni, Ottillioni, Novillioni *ec.* crescendosi ciascuno da ogni sei note.

Il suddetto numero dovrebbe però così esprimersi esattamente: *due mila ottocento cinquantaquattro Quadrillioni, ventun mila trecentocinquantaquattro Trillioni, settecento novantun mila dugento cinquantasei Billioni, quattrocento due mila*

trecento quattordici Millioni, *cinquecento settanta-quattro mila*, *e dugento ottanta sei*; e qualunque altro numero similmente potrassi esprimere; per esempio 4 8 9 *, 6 7 3, 5 1 0*, 2 4 3, 8 0 5 significa *quattrocento ottantanove Billioni*, *seicento settantatre mila e cinquecentodieci millioni*, *dugento quarantatre mila ottocentocinque*; e così qualunque altro facilmente dovrassi intendere, secondo che nell' antecedente Tavola si è accennato il valore delle note poste sopra, o sotto.

Oltre però a queste note Aritmetiche, quà solamente addotte da Gereberto Monaco Floriacense, ottimo Filosofo, e Matematico, che poi fu Arcivescovo Remense in Francia, poscia in Ravenna di Romagna, fattovi elevare dall' Imperatore Ottone III. di cui era stato Maestro, ed indí fu fatto poi Papa nell' anno 999, cioè novecento novantanove, col nome di Silvestro Secondo, che poi morì nel 1003, cioè nell' anno terzo dopo il millesimo, vi sono le note Romane, che prima solamente si adoperavano, ed ora in molti luoghi pure si ammettono le quali sono queste lettere I, V, X, L, C, D, M. La prima espone l' unità, e duplicandola II. fa due, triplicandola fa III. cioè tre. La seconda esprime il cinque, e postogli avanti l' unità, cioè IV. assegna quattro, ma se gli si aggiunge dopo l' unità VI espone sei, se due unità VII. fa sette, e se tre unità VIII. fa otto. La terza lettera esprime dieci, e con l' unità precedente IX. espone nove, con le unità poi aggiuntevi XI. XII. XIII. rappresenta undici, dodici, e tredici, ed aggiuntovi la nota del quattro, e del cinque, e dell' altre susseguen-

guenti, cioè XIV. XV. XVI. XVII. XVIII. XIX. espone quattordici, quindici, sedici, diecisette, diciotto, diciannove; e duplicando, o triplicando l'istessa, cioè XX. XXX. rappresenta il venti ed il trenta, alle quali addotte le note degli altri primi numeri, come XXII. XXIV. XXXV. *ec.* si espongono ventidue, ventiquattro, trentacinque, e così gli altri. La quarta lettera significa il cinquanta, e con la terza avanti, cioè XL. fa il quaranta; e con esse dopo, come LX. LXX. LXXX. si esprime il sessanta, il settanta, e l'ottanta; alle quali aggiunte le altre note de' primi numeri, come LXV. LXXII. LXXXIV. LXXXIX. ed altre simili, si ha il sessantacinque, il settantadue, l'ottantaquattro, l'ottantanove *ec.*

La quinta lettera C. significa cento, e postavi avanti la terza, cioè XC. espone novanta, onde XCIII. dice novantatre, XCIX. importa novantanove, ed aggiunte le altre note al C, come CV. CX. CXXIV. *ec.* esprimesi cento cinque, cento dieci; cento ventiquattro *ec.* e duplicando l'istessa C, o triplicandola, cioè CC. CCC. rappresenta il dugento ed il trecento, alle quali parimente si aggiungono l'altre note, come CCXXV. CCCLIII. CCCLXIX. espongono dugento venticinque, trecento cinquantatre, trecento sessantanove *ec.*

La sesta lettera D. esprime cinquecento, onde postavi avanti la C, cioè CD. rappresenta il quattrocento, ed aggiuntavi dopo, come DC. DCC. DCCC, si espone il seicento, il settecento, e l'ottocento; ed aggiunte a queste medesime altre note, DCXII. DCCLIV. DCCCXLVII. similmente espongono il seicento dodici, il settecento

cinquantaquattro, l' ottocento quarantasette *ec.*

Finalmente la settima lettera M rappresenta il mille, e postovi avanti il C, cioè CM. propone il novecento, e postagli dopo MC. MCC. MCCC. MCD. MD. MDC. MDCC. *ec.* significasi il mille cento, mille dugento, mille trecento, mille quattro cento, mille cinque cento, mille sei cento, mille sette cento *ec.* ed aggiuntevi ancora altre note, come MDCXIV. MDCCCLXV *ec.* si averà il mille seicento quattordici, il mille ottocento sessantacinque *ec.* e replicando l' istessa M, cioè MM. ovvero MMM. *ec.* si espone due mila, tre mila *ec.*

Ma noi parleremo di quell' altre note avanti proposte, che più facilmente s' intendono, con minor calcolo, rapportando maggiori numeri; nè ritrovandosi come con le note Romane si esprimessero i Millioni, e Billioni, e Trillioni *ec.*

CAPITOLO II.

Del sommare insieme più numeri della medesima specie.

SI scrivano per ordine i numeri da aggiungersi insieme, facendo corrispondere le unità alle unità, le decine alle decine, le centinaia alle centinaia, e così di mano in mano: poscia tirata sotto una linea, si compongano insieme le unità da aggiungersi, le quali se sono più di nove, come che tale somma dovrebbe con due, o più note esprimersi, solamente l' ultima ci si deve sottoscrivere, riserbandosi l' altre da aggiungersi al luogo delle decine; e queste parimente congiungendosi insieme, del numero che ne risulta, se ne

sot-

sottoscrive pure l' ultima nota nel luogo delle decine, riserbando l' altre di aggiungersi alle centinaia; e così di mano in mano andando verso la sinistra, fin che non vi sia altro da aggiungersi, tutto il resultante si scriverà al suo luogo, come s' intenderà meglio nel seguente esempio.

Siano da aggiungersi insieme li quattro numeri A, B, C, D, e scrivendoli ordinatamente ciascuno sotto l' altro; tiratagli sotto la linea retta, si pongano insieme le unità 2 e 4, che fa 6, lo zero o non aggiunge nulla, ma la nota superiore 6 con gli altri compone 12, però si scriva sotto il 2, e si trasporti alla parte delle decine l' unità, che vi era avanti, e prese le tre note di decina, l' uno che si porta, col 9 fa 10, e col 2 diventa 12, col 5 riesce 17, e col 2 si fa 19, però sotto scrivasi 9; ed alle centinaia ammessa l' antecedente unità, con 8 fa 9, col 7 diventa 16, col 2 fa 18, e con l' 8 fa 26, però scrivasi sotto il 6, ed il 2 si trasporti alle migliaia, che con 1 farà 3, con 3 diventerà 6, con 4 riesce 10, e con 5 si fa 15, onde si scriva pure sotto il 5, e portata l' unità a' numeri precedenti, con 5 fa 6, con 6 fa 12, con 8 diventa 20, e con 4 si fa 24, perciò si scriva di sotto il 4, ed agli antecedenti numeri aggiunto il 2, che con 5 fa 7, con 7 fa 14, e con 3 diventa 17, scritto sotto il 7, e trasportata di là l' unità, con 1 e 2 farà 4, da scriversegli sotto; onde la somma di quei numeri A, B, C, D, è uguale a ciò che ci esprime il numero E, che importa *quattro mil-*

A	2345826
B	784250
C	1563724
D	51892
E	4745692

lioni; ſettecento quarantacinque mila, ſeicento novantadue. Eccone altri minori eſempj.

245	456	7952	82052
1382	3240	345	64721
2748	532	28	8094
4375	4228	8325	154867

Per riprova d' aver bene operato, ſi ſuole alle volte rifare l' operazione a roveſcio, cioè, ſiccome prima ſi cominciò a ſommare dalle note inferiori aſcendendo alle ſuperiori, così un altra volta può cominciarſi dalle ſuperiori diſcendendo alle inferiori, per vedere ſe ne ritorna il medeſimo numero nella ſomma, come prima ſi era trovato.

Oltre a ciò può farſi la prova del nove in queſta maniera. Si mettano inſieme le note de' numeri propoſti, ſommandogli con qualſivoglia ordine, come ſe fuſſero ſemplici unità, e rigettando ſempre il nove qualunque volta s' incontri, ritengaſi ſolamente il conto di quello ne avanza; poſcia ſi faccia il ſimile nella ſomma, in cui ſe da i 9, non avanzaſſe lo ſteſſo numero, ſarebbe ſegno di aver fatto male il calcolo con qualche errore commeſſovi, ma ſe ſi trova il medeſimo avanzo di numero, la ſomma ſi crederà ſtare beniſſimo, ſe pure non vi ſi fuſſe per ſorte errato di nove. Così nel primo precedente eſempio, rigettando il nove da' numeri A, B, C, D, ne rimane una ſola unità, e l' iſteſſa avanza nella ſomma E, come è chiaro; imperocchè nel numero A, che è 2345826, il 4 e 5 fa 9, il 6 e 3 fa 9, l' 8 col 2 fa 10, e con l' altro 2 fa 12, che ſono

3 oltre il 9; nel numero B, che è 784250, riesce 8, essendo gli altri 7 e 2 uguali a 9, ed ancora 4 e 5 uguale a 9; nel numero C, che è 1563724, rimane solo 1, essendo gli altri 5 e 4 uguali a 9, 6 e 3 uguali a 9, 7 e 2 uguali a 9; nel numero D, che è 51892 levato il 9, ed il 18, rimane 5 e 2, che fanno 7; dunque del primo numero essendo rimasto il 3, nel secondo 8, che con quello fa 11, nel terzo l'unità, che con quelli fa 12, e nel quarto 7, che con li precedenti fa 19. è chiaro, che levati i due 9 rimane 1, ed ancora nella somma E, che è 4745692, levato il 9, il 7 e 2 il che pure è 9, il 4 e 5 che ancora fa 9, rimane il 6 con l'altro 4 che fa 10, onde ci rimane pure l'unità oltre i novesimi.

L'istesso si mostrerà negl'altri esempj, come ancora in quest'altro calcolo, in cui ne' due numeri precedenti levato il 3 e 6 che fa 9, rimane 4, e con 8 farà 12, cioè 3 sopra il 9, e col 2 farà 5; ed ancora nella sua somma 6 e 6 fa 12, che sono 3 sopra il 9, e questi 3 con quelle due unità fa pur 5, onde sarà ben ridotta da que' due numeri cotesta somma; e così pure si farà in altri casi, e molto piacerà questa specie del 9, di cui se ne mostreranno quì altre proprietà molto favorevoli, che si vedranno in altri Capitoli.

$$\begin{array}{r} 346 \\ 820 \\ \hline 1166 \end{array}$$

CAPITOLO III.

Del sommare i numeri di specie diversa.

Alle volte si devono aggiungere numeri appartenenti a varie specie di cose, come sareb-

rebbero lire, soldi, e danari; o pure giorni, ore, e minuti, o ancora di una circolare periferia i gradi, i minuti primi, i minuti secondi, i minuti terzi *ec.* e similmente in altri casi composti di varie parti. Allora conviene disporre i numeri in maniera, che si corrispondano le specie simili una sotto l'altra, e cominciando a sommare quelli di minor valore, si vede se nella somma si contiene la specie superiore, la quale si ritiene, sottoscrivendo solamente l'avanzo, e riportando ciò che si è ritenuto, per congiungerlo a' numeri della specie precedente, li quali altresì posti insieme, se ne comprende qualche numero dell'altra specie superiore da riportarsi ad essa, scrivendone sotto questa il residuo; e così pure si fa nell'altre specie se vi sono antecedentemente, compreso poi il resto nella maggiore specie di tutte, come si spiegherà meglio ne'seguenti esempj.

siano	*Lire.*	*Soldi.*	*Danari.*
	8.	10.	4
	2.	6.	8
	4.	10.	4
somma lire	15.	7.	4

Cominciando dall'infima specie, che sono i danari, si dice 4 e 8 fanno 12, li quali dodici danari fanno un soldo, e rimane 4 da sottoscriversi; indi aggiunto quel soldo alli 6 fanno 7, e li 10 duplicati ne fanno 20, che appartengono ad una lira, però gli si sottoscrive 7, e computata questa lira con le altre 4, 2, e 8 diventano lire 15 onde la somma è lire 15. 7. 4 e se vi fossero

stati

ſtati ancora diviſi li ſcudi, che hanno lire 7 l' uno in Toſcana, biſognava dire ſcudi 2, lire 1, ſoldi 7, e danari 4, perchè il primo numero ſarebbe pure ſtato ſcritto in queſt' altra maniera Scudi 1. lire 1. 10. 4 in vece di lire 8. 10. 4

Similmente ſe vi foſſero varj numeri di giorni, d' ore, e di minuti, ſi potranno ſimilmente comprendere nell' iſteſſa maniera.

	Giorni.	*Ore.*	*Minuti.*
	8.	17.	48
	13.	20.	16
	21.	19.	30
	5.	18.	38
ſomma	50.	4.	12

Congiungendo i minuti 38, 30, 16, e 48 ne rieſce 132, in cui 120 importa due volte il ſeſſanta, cioè 2 ore, ciaſcuna delle quali ha ſeſſanta minuti, però ſi ſcriva ſotto il rimanente 12; ed aggiunte ore 2 alle 18, 19, 20, e 17 ne rieſcono 76, in cui 72 importano 3 volte le 24 ore, e però ſottoſcrittovi il rimanente 4, ſi traſportino 3 giorni (ciaſcuno de' quali ha le 24. ore) agli altri 5, 21, 13, e 8, che ne rieſcono giorni 50; e ſe vi ſi doveſſero ancora diſtinguere i meſi di 30 giorni l' uno, ſarebbero un meſe e giorni 20, con 4 ore, e 12 minuti.

Similmente eſſendovi alcuni peſi, libbre, ed once d' olio, o di farina *ec.* ſe ne ricaverà la ſomma in ſimigliante maniera. Per eſempio ſiano.

	Pesi.	*Libbre.*	*Once.*
	7.	14.	6
	12.	18.	10
	5.	16.	9
la somma è	26.	0.	1

Computate le once 9, 10, e 6 sono 25, in cui due volte sono le 12, che compongono la libbra, però levate le 24, si scrive sotto solamente 1, e si portano le 2 libbre all' altre 16, 18, e 14, che ne fanno 50, ma 25 libbre facendo un peso, dunque ne riescono 2 pesi senz' altra libbra, onde vi si scrive sotto il zero, e questi 2 pesi composti con 5, 12, e 7 riescono 26.

Dovendosi ancora computare i gradi della curva circolare, con i suoi minuti primi, e secondi: siano

	Gradi.	*Minuti* I.	*Minuti* II
	25.	32.	46
	60.	50.	27
	13.	41.	32
la somma sarà	100.	4.	45

Imperocchè li minuti secondi 32, 27, e 46 sono 105, da cui levato il 60, che è un minuto primo, ne rimane da scriversi sotto 45, e computato quel minuto primo con gli altri 41, 50, e 32 se ne fanno 124, di cui il 120 è due volte 60 minuti primi, che ne importano 2 gradi, onde scrittovi sotto il 4 si computano quelli due gradi con gli altri 13, 60, e 25, che riescono 100.

Chi volesse provare ancora l' esattezza di questi sommati, potrebbero sommarsi li numeri di

qua-

qualunque ſpecie con un altro ordine cominciando da' ſuperiori, e diſcendendo agl' inferiori, ſiccome prima abbiamo ciò fatto cominciando dagl' inferiori, ed alzandoſi a' ſuperiori, e vedere ſe ne rieſce l' iſteſſa ſomma. Volendo poi col 9 provare ſe vi ſia lo ſteſſo eccesſo ne' numeri da ſommarſi, come è nella loro ſomma, non baſterà far ciò in qualunque numero, come nel capitolo precedente ſi è inſegnato, circa alla ſomma de' numeri della medeſima ſpecie, ma conviene moltiplicare quelli della prima ſpecie, e della ſeconda, come ne comporta la terza.

Per eſempio, ove ſi adduſſero lire, ſoldi, e danari, come che la lira è di 20 ſoldi, ed il ſoldo di danari 12, eſſendo ſopra il 9 quello 2, e queſto 3 (perchè il 20 ſupera il 18 con 2, ed il 12 ſupera il 9 di 3; anzi baſta oſſervare le ſemplici note de' numeri, che moſtrano appunto il loro eccesſo ſopra il noveſimo, eſſendo 1 con 2 uguale a 3, perciò tanto il 12, quanto il 21 ſupera il 9 ſolo, o duplicato di 3, e così ancora 42, o 24 ſupera il 9 di 6 *ec.*) perciò moltiplicando il 2 col 3 fa 6, onde li numeri delle lire 4, 2, e 8 eſſendo 14, cioè 5 ſopra il 9, biſogna moltiplicare eſſo 5 nel 6, che fa 30, cioè ſolamente 3 ſopra il 9 (ſuperando 30 il 27 di 3) e li numeri de' ſoldi 10, 6, e 10, che ſuperano il 9 di 8, deve moltiplicarſi in 3, che farebbe 24, cioè 6 ſopra il 9; indi ne' danari 4, 8, e 4 fanno 16, cioè 7 ſopra il 9, onde avendoſi dalle lire l' eccesſo del 9 uguale a 3, da i ſoldi uguale a 6 (che con 3 il 6 fa 9) rimane il ſolo eccesſo 7. Ma ancora nel ſommato le lire 15 fanno 6, che moltiplicate per 6 fareb-

rebbero 36 uguale al quadruplo 9, e ne' soldi il 7 moltiplicato per 3 fa 21, che pure è 3, che sommato col numero de' danari 4, fa pur la somma di 7, come si trovò ne' numeri da sommarsi.

Quanto a' giorni, ore, e minuti, essendo il giorno di 24 ore, e l' ora di 60 minuti, essendo tanto questo, che quello 6 sopra il 9, e moltiplicato il 6 per 6 facendo 36, che contiene quattro volte appunto il 9; perciò non occorre cercare il 9 nel giorno, ma basta osservarlo nell' ore, ed il suo eccesso moltiplicato per 6 si unisca a' numeri de' minuti, come nell' esempio addotto. Dall' ore 18, 19, 20, 17 ne risultano 2 oltre il 9, e moltiplicato 2 per 6 diventa 12, che è 3 sopra il 9; indi da minuti 38, 30, 16, e 48 levato il 9 rimangono 6, ed aggiuntovi il 3 diventa pur 9, onde niuno eccesso vi rimane; Così ancora nel sommato le ore 4 moltiplicate per 6 fanno 24, che sono pure 6 sopra il 9, ed il 12 de' minuti, essendo 3 sopra 9, con l' altro 6 rimane pur 9 senza veruno eccesso.

Circa i pesi, libbre, ed once, essendo il peso di 25 libbre, che è un 7 sopra il 9, e la libbra di 12 once, che importano 3 oltre il 9, sarà pure 7 via 3 uguale a 21, che ancora è 3 sopra il 9. perciò gli eccessi e del peso, e delle libbre sopra li 9, si moltiplicheranno per 3, indi si aggiungeranno a' numeri dell' once, come nell' addotto esempio. I pesi 5, 12, e 7 importano 6 oltre il 9, e moltiplicato 6 per 3 fa 18, che è appunto 9 senza veruno eccesso; le libbre poi 16, 18, e 14 ne importano 3 sopra il 9, che moltiplicato per 3 fa parimente 9; sicchè basta osservare l' once 9, 10, e 6, che importano 7 oltre il 9. Ma nel sommato

di

di esse i pesi 26 importano 8 sopra il 9, che moltiplicato per 3 fa 24, cioè 6 eccesso di 9, che con l' oncia 1 importa ancor essa il 7, e però è ben disposta.

Quanto a' gradi, e minuti primi, e minuti secondi, essendo ogni grado di 60 minuti primi, e qualunque minuto primo di 60 minuti secondi, perciò il grado non deve compararsi co' 9, perchè il suo eccesso anderebbe moltiplicato in 6 via 6, che fa 36 uguale alli 9, ma solamente l' eccesso de' minuti primi 41, 50, e 32, che è 6 sopra il 9, moltiplicatosi pure per 6 fa il 36 uguale alli 9; ma ne' minuti secondi 32, 27, e 46 rimane pure il 6 sopra il 9. Ed ancora nel sommato de' minuti primi 4 moltiplicati per 6 fanno 24, che pure sono 6 sopra il 9, e ne' minuti secondi 45 non vi è altro eccesso sopra il 9; onde è il medesimo eccesso ne' numeri da sommarsi, e nel sommato di essi Onde nessuna delle addotte somme si trova mal fatta.

CAPITOLO IV.

Del modo di sottrarre i numeri della medesima specie, o di specie diverse; e di alcune proprietà de' numeri verso il 9.

SI scriva il numero maggiore, da cui si deve fare la sottrazione sopra al minore, che deve sottrarsi; di manierachè, corrispondendo le unità alle unità, le decine alle decine, li centesimi alli centesimi, e così di mano in mano gli altri, cominciando poscia dall' ultimo, si sottraggano quelle del numero inferiore da quelle del superiore, sottoscri-

ſcrivendo l' avanzo ne' luoghi corriſpondenti; ma perchè può darſi il caſo, che qualche numero inferiore ſi trovi maggiore di quello del ſuperiore, da cui non potrebbe ſottrarſi, conviene allora preſtare una decina antecedente al numero ſuperiore, acciocchè baſti all' effetto deſiderato, e fatta la ſottrazione dell' inferiore, ſi ſcriverà l' avanzo al di ſotto. Quindi la precedente nota del numero ſuperiore rimarrà diminuita dell' unità aggiunta alla ſua ſeguente nota, come ſi vedrà nell' eſempio ſeguente.

A	92342
B	51831
C	40511

Si debba ſottrarre il numero B dal maggiore A. Eſſendo ſcritti per ordine queſto ſopra quello, ſi levi l' ultima nota 1 dalla ſuperiore 2, e reſterà pure 1 da ſcriverſi ſotto al ſuo luogo; indi ſottratto il 3 dal 4 reſta pure un altra unità da ſoſcrivervi; perchè poi 8 non può levarſi da 3, gli ſi aggiunge una decina, e ſi fa 13, da cui tolto 8 rimane da ſottoſcriverſi 5; poſcia eſſendo levata l' unità dal ſuperiore numero 2, rimane uno, da cui volendo cavare l' altro inferior numero 1 nulla ne rimane, perciò ſottoſcriveſi il zero; indi detratto 5 da 9 rimane da ſottoſcriverſi 4, e così è compiuta la ſottrazione C.

D	3425
E	837
F	2588

Un altro eſempio ſia queſto, in cui debbaſi dal numero D ritrarne il numero E. In queſto non potendo ſottrarſi, ne 7 da 5, ne 3 da 2, ne 8 da 4, biſogna fare in queſt' altro modo; 7 da 15 ne reſta da ſottoſcriverſi 8, e perchè il 2 rimane 1, aggiuntavi pure la decina ſi dirà 11, da cui tolto il 3, rimane pure 8 da ſottoſcriverſi, ed il 4 diminui-

minuito ancor esso dell' unità rimane 3, onde finalmente dovrà levarsi l' 8 dal 33, che rimarrà 25 da sottoscriversi, per la sottrazione F ivi posta; e così in altre maniere, che si debbano sottrarre alcuni numeri da altri maggiori, potrà similmente farsi con le addotte condizioni da osservarsi.

Per ripruova di aver bene operato, basta sommare il ridotto numero C col numero sottratto B, la qual somma se restituisce il maggior numero A, da cui è fatta la sottrazione, sarà fatta benissimo. Ma se vi riuscisse qualche divario, sarà segno di aver errato nell' operazione; similmente nell' altro esempio si provi di sommare il ridotto numero F col sottratto E, onde si vegga se tale somma è l' istessa, che il maggior numero D, onde fu fatta la sottrazione, il che se avviene, sarà la sottrazione ben fatta; ma se vi fosse diversità, non sarebbe sottratto bene il numero minore E, dal maggiore D.

Si potrebbe ancora ciò provare con ridurre il 9 dalli due numeri B, e C, e vedere se ciò, che restasse in questi due fosse il medesimo, che quello rimarrebbe nel maggior numero A, detratti pure quindi li 9. E similmente nell' altro esempio si tolga il numero 9 dalli due numeri E, ed F, indi si paragoni tal' eccesso con quello del maggior numero D, levatogli il 9, che se sarà il medesimo eccesso in quelli, ed in questo, sarà ben fatta la sottrazione; e se tale non fosse, sarebbe malamente sottratto il minor numero dal maggiore. Però nel primo esempio, se si leva il 9 da' numeri B, e C, rimane 2, ed ancora dal numero A il 2 rimane; e nel secondo esempio tolto il 9 da E,

ed F, resta 5, e dal numero D, rimane il medesimo, onde può credersi l'operazione ben fatta in ambidue gli esempj.

Volendo poi sottrarre i numeri di specie diversa, per esempio il tempo B dal tempo A, ne risulterà C nel modo seguente.

	Giorni.	*Ore.*	*Minuti.*
A	14.	6.	15
B	7.	22.	52
C	6.	7.	23

Non potendosi sottrarre li minuti 52 da' 15, si levi un ora dalle ore 6, la quale importando 60 minuti, aggiunti a' 15 ne diventeranno 75, da' cui tolti li 52, rimarrà da sottoscriversi 23; le ore di A rimarranno 5, e non potendoci cavare le ore 22 di B, si aggiungerà a quell'ore 5 un giorno, cioè ore 24, che riusciranno 29, d'onde cavate le 22, rimarranno 7 da scriverci sotto; poscia li giorni 7 levati da giorni 13 (avendone levato uno dalli 14) ci lasciano giorni 6, però questo ancora si sottoscrive nella sottrazione C.

In quest' altra sottrazione di lire, soldi, e danari, quando il numero inferiore E, da sottrarsi dal maggiore D, al di sopra, ha li danari, ed i soldi maggiori di quelli, che sono nell' altro D, bisogna alli danari del numero superiore aggiungervi un soldo, cioè altri 12 danari, ed a' soldi aggiungervi una lira, cioè soldi 20; onde si dovrà sottrarre danari 8 da 16, e levato quest' 8, rimane parimente 8, che sotto si scrive; e li 3 soldi rimanendo 2, con gli altri 20 sono 22, da' quali sottratto il 6, rimangono

	Lire.	*Soldi.*	*Danari*
D	21.	3.	4
E	15.	6.	8
F	5.	16.	8

no 16 da sottoscriversi ad essi; indi il numero di lire 21 rimane 20, da cui sottratte le 15 lire, rimangono da soscriversi 5 nella sottrazione F: e per provare, che sia ben fatto tale residuo, basterebbe sommare questo F col detratto E, e vedere se riesce lo stesso col numero maggiore D, che se saranno uguali, sarà ben fatta la sottrazione; ma se vi fusse qualche diversità, è certo, che non ben fatta sarebbe tale sottrazione.

Parimente si potrebbe levare li 9 tra B, e C nell' antecedente esempio, e vedere se il rimanente uguagliasse l'eccesso de' 9 nel numero A; e nell' altro conseguente parimente prendere l' eccesso di 9 da E, ed F, ed osservare se l' istesso fosse nel D; detrattine i loro 9 in quella maniera, che nel precedente Capitolo si è avvertito doversi fare ne' numeri di specie diversa; cioè nel primo esempio basterà da B, e C prendere l' eccesso di 9 solamente tra le ore 22, e le 7, il quale eccesso è 2 da moltiplicarsi per 6, che diventa 12, cioè 3 sopra il 9, e da' minuti 52 e 23 l'eccesso di 9 è 3, onde tutto l' eccesso rimane 6, ed ancora nell' A le ore 6 moltiplicate per 6 fanno 36, ove non è veruno eccesso di 9, e poscia ne' minuti 15 parimente rimane 6, onde è ben fatta quella sottrazione; e nel secondo esempio paragonando di E, ed F le lire 15, e le 5, che fanno 20, cioè l'eccesso 2 sopra il 9, e moltiplicandolo per 6 diventa 12, il di cui eccesso sopra 9 è 3; poscia i soldi 6, e 16, che sono 22, hanno l'eccesso 4 sopra il 9; e moltiplicato per 3 fa 12, che pure ha l' eccesso 3, e con l' altro 3 delle lire, fa 6; indi ne' danari 8 ed 8, che sono 16, vi è l' eccesso 7 sopra i

9, onde con l' altro 6 diventa 13, che importa l' eccesso 4; e parimente nel D il numero delle lire 21, ha l'eccesso di 3 sopra il 9, che moltiplicato per 6 diventa 18, senza verun eccesso di 9, e li soldi 3 moltiplicati in 3 fanno pure 9; onde ne' danari resterà il medesimo 4, sicchè pure è ben fatta questa sottrazione.

Giacchè si è molto discorso di questi eccessi del 9, ed ancora dopo se ne dovrà parlare, stimo bene, che si avvertano alcune proprietà numeriche, competenti ad esso nove: Primieramente l' eccesso di qualunque numero sopra il novesimo, si vede nell' istesse sue note, come 25 è sopra li due nove con l' eccesso di 7, il che si ha dal 2 e dal 5; così pure il 43 eccede li quattro nove di 7, perchè 4 e 3 fanno 7; similmente anche in un grandissimo numero 21425863 combinando le note, 2, ed 1, e 4, e 2 fanno 9, poi 5 e 8 fanno 13, che sono 4, li 6, e li 3 fanno pure il 9, dunque l' eccesso di quel numero sopra il novesimo sarà solamente 4; e l' istesso si trova, paragonando le note, che fanno il 9, e prendendo solamente l' altre; così poteva vedersi, che 6 e 3 fa 9, 8 e 1 fa 9, 5, e 4 fa 9, e restano 2, e 2, che fanno 4, onde questo è il suo eccesso sopra il novesimo; e se sarà un numero con le stesse note diversamente poste, come 5421362 8, o pure 23854162 *ec.* hanno lo stesso eccesso 4.

Secondariamente, se le note del numero poste insieme fanno solamente il 9, e non altro eccesso, quel numero sarà puramente di alquanti nove composto; così perchè 7 e 2 fanno 9, ed ancora 5 e 4, ed altresì 3 e 6 *ec.* perciò i numeri 72, 27,

54, 45, 36, e 63 sono novesimi, ed ancora in numeri maggiori 5724, 6831054, *ec.* vi è il 9 più volte, perchè 7 e 2, con 5 e 4, e 6 con 3, ed 8 con 1, e 5 con 4 importano il 9.

In terzo luogo si può osservare, quante volte sia il 9 in uno di tali numeri novesimi; il 9 è uno, perchè manca dal dieci una unità; il 18 è due 9, perchè manca 2 dal 20; il 27 è tre 9, mancando per 3 dal 30; e così andando avanti fino al 90, che è decimo nono; ed il 99 è undecimo nono; il 108 è il duodecimo, perchè manca per 2 dal 110; il 117 è pure terzodecimo, mancando per 3 dalla seguente decima 120; e così gli altri susseguenti, di maniera che qualunque numero novenario, aggiuntovi il numero, che ha del 9, farà sempre qualche decimo, essendo 9 con 1 uguale a 10, e 18 con 2 uguale a 20, e 27 con 3 uguale a 30, ed ancora il 99 con l' 11 uguale a 110, ed il 108 con il 12 uguale a 120, e così il 207 col 23 è uguale a 230, il 738 con l' 82, fa 820 *ec.*

In quarto luogo si avverta, che due diversi numeri, se sono composti delle medesime note variamente disposte, la loro differenza sarà sempre di qualche novenario. Per esempio 13 da 31 differisce per 18, che sono due 9; così 47 da 74 differisce per 27, che sono tre 9; parimente 17538 da 53781 differirà per 36243, che ha 4027 volte il 9; e similmente 341 da 413 differisce per 72, che sono 8 volte il 9, e 2157 da 5271 differisce per 3114, che sono 346 volte il 9. E così sempre la differenza de' numeri composti delle stesse note alternate importa alquanti 9.

Anzi altri numeri, non con le medesime note composti, ma nè pure con l'istessa moltitudine di esse, purchè i loro Caratteri insieme composti, ne mostrassero lo stesso numero, questi ancora averanno la loro differenza composta di 9: Per esempio 52, e 43, e 16, e 124, e 322. *ec.* ne importano 7, e la differenza di 52 da 43 è appunto il 9, e del medesimo 52. da 16, è il 36, cioè quattro novesimi, da 124 manca per 72, che sono otto novesimi, e da 322 per 270, che sono 30 novesimi. Parimente paragonando il 32 col 104, col 212, le cui note importano il 5, la differenza del primo dal secondo è 72, cioè 8 volte il 9; del medesimo primo dal terzo, la differenza è 180, cioè 20 volte il 9; ed altresì la differenza del secondo dal terzo sarà il 108, che importa 12 volte il 9, e così negli altri. Così la differenza di 6 da 24, o da 42, o da 321 si troverà essere alquante volte il 9, cioè tra il primo, e il secondo la differenza è 18, ed ancora tra il secondo, e il terzo vi è la stessa differenza col 9 due volte, e tra il primo, ed il terzo la differenza è 36, che ha 4 volte il 9, e la differenza tra il terzo, e il quarto è 279, che importa il 9 per 31 volta, *ec.*

Finalmente, se sono diversi gli eccessi del 9 in un numero, e in un altro, quando il maggior numero abbia maggiore eccesso, ed il minore un altro eccesso minore di quello, la differenza di tali eccessi sarà la medesima, con cui la differenza de' numeri proposti eccede il 9. Per esempio siano questi due numeri 347, 228; l' eccesso del 9 nel primo, che è maggiore, sarà 5, perchè 7, e 4

fa

fa 11, e 3 con esso fa 14, in cui 4 e 1 fa il 5, nel secondo, che è minore l' eccesso del 9 sarà 3 (perchè 2 e 2 fa 4, e con 8 il 12, in cui 1 e 2 fa 3) minore dell' altro eccesso, la differenza de' quali eccessi è il 2; così ancora la differenza del maggior numero dal minore, che sarebbe 119 (perchè 119 con il 228 fa il 347) ha pure il 2 eccesso sopra il 9. Ma se il maggior numero ha un eccesso di 9 minore dell' eccesso, che averà il minor numero; la differenza di questi eccessi si levi dal 9, ed il resto sarà l' eccesso di 9, che ha la differenza di un numero dall' altro. Per esempio siano i numeri 21, e 17 l' eccesso del primo, e 3, del secondo è 8, la differenza de' quali è 5, e levato il 5 dal 9, resta 4, dunque la differenza di 21 da 17, è per appunto il 4, e così negli altri.

CAPITOLO V.

Del moltiplicare i numeri della medesima specie.

VOlendo moltiplicare un numero con un altro numero, bisogna che si moltiplichi qualunque nota dell' uno con ciascuna nota dell' altro, e disporre le note risultanti nel numero prodotto a' suoi luoghi convenienti, sommando insieme, quando occorre, quelle note, che alla medesima specie delle decine, delle centinaia, delle migliaia *ec.* appartengono.

Per esempio volendo moltiplicare 2467 per 134, si principj a moltiplicare le note di quel primo numero per l' ultima nota del secondo, che è 4, dicendo: 4 via 7 fa 28, onde si scrive 8 nel luo-

go dell' unità, e portato avanti il 2, essendo 4 via 6 uguale a 24, con esso 2 fa 26, però scrivo 6 nel luogo delle decine, e trattengo 2, che aggiunto a 4 via 4 uguale 16, diviene 18, e però scrivo 8 nel luogo de' centesimi, e trattengo l' unità, indi 4 via 2 diventa 8, e coll' 1 fa 9, che sarà la prima nota da aggiungervi; onde quel dato numero 2467 moltiplicato per 4 riesce 9868. Indi moltiplico lo stesso per l' altra nota 3 della decina, dicendo 3 via 7 fa 21, però scrivo 1 sotto la penultima nota, posto il zero sotto l' ultima, e ritengo il 2, indi moltiplicato 3 via 6 riesce 18, ed aggiuntovi il 2 fa 20, onde scrivo nella parte antecedente esso zero, e trattenuto il 2, moltiplicato il 3 via 4, che fa 12, col 2 riesce 14, onde scrivo il 4 verso la parte millesima, e tengo l' unità, indi 3 via 2 essendo 6, coll' 1 diventa 7, che sarà la prima nota in questa moltiplicazione, però lo stesso primo numero, moltiplicato per 3 decine diviene 74010; poscia lo stesso numero moltiplicato per l' unità posta nella parte centesima, rimane lo stesso con due zeri aggiuntivi, cioè 246700, e sommando questi tre numeri così disposti, trovo riuscirne 330578, e questa sarà la moltiplicazione di 2467 per 134.

$$\begin{array}{r} 2467 \\ 134 \\ \hline 9868 \\ 74010 \\ 246700 \\ \hline 330578 \end{array}$$

Però si avverta primieramente, che volendo moltiplicare un numero per 10, basta aggiungere a quel tal numero un zero, e volendo pure moltiplicarlo per 100, basta gli si aggiungano due zeri, e se si moltiplica per mille, basta aggiungervi tre zeri, e così di mano in mano. Per esempio, il

il 45 moltiplicato per 10, viene 450, per cento: riesce 4500, per mille fa 45000. per dieci mila 450000. *ec.*

Similmente, quando un numero finisce in uno, o più zeri, si possono questi separare, e fare la moltiplicazione delle note che restano, e poscia al prodotto aggiungere li zeri già separati; come volendo moltiplicare 320, per 42, basta si moltiplichi 32 per 42, ed al prodotto 1344 aggiungasi uno zero, che riuscirà 13440. Anzi essendo e nel moltiplicante, e nel moltiplicato alquanti zeri, basterà separarli dall' uno, e dall' altro, e poi moltiplicate insieme le rimanenti note si aggiungeranno al prodotto tutti quegli zeri, che si erano levati dall' uno, e dall' altro; così volendo moltiplicare 623000 per 18400 basterà moltiplicare 623 per 184, che ne siuscirà 114632, ed aggiuntivi li cinque zeri levati da' detti numeri proposti, si averà l' intero prodotto 11463200000, che appunto sarà il prodotto di 623000 per 18400, come doveva farsi.

Si avverta pure, che tanto è il moltiplicare de' due numeri il primo col secondo, quanto moltiplicare il secondo col primo; però di essi numeri proposti a moltiplicarsi, talvolta è utile prendere quello, che è composto di note più semplici, e che danno più facile la moltiplicazione dell' altro con questo, onde riesce più agevole il prodotto, e meno soggetta agli errori sarà la moltiplicazione; come per esempio, dovendosi moltiplicare 785 per 23 riesce più facile il moltiplicare il primo per mezzo del secondo, cioè per 3 e per 2, che il moltiplicare il secondo per 5, e per 8, e

per

per 7; ed ancora è meglio moltiplicare il maggiore per il minore, che questo per quello, sebbene torna poi lo stesso in qualsivoglia modo si disponga l'operazione.

Volendo poi riprovare se siasi bene operata la moltiplicazione, si potrà rifarla nell' altro modo; cioè se si è moltiplicato il primo pel secondo, si moltiplichi pure il secondo per il primo, dovendoci tornare il medesimo: per esempio, essendosi di sopra moltiplicato 2467 per 134 si può di nuovo moltiplicare il 134 per 2467, cioè per 7, si moltiplichi, e ne riuscirà 938, indi per 6 diventerà 804, poscia per 4, averemo 536, indi per 2 riuscirà 268; li quali numeri posti secondo l' ordine suo, aggiungendo all' 804 un zero, al 536 due zeri, ed al 268 tre zeri, sommandogli, ne riesce come prima la moltiplicazione 330578, onde fu fatta bene ancora la prima.

```
   134
  2467
------
   938
  8040
 53600
268000
------
330578
```

Essendo pure il 134 uguale al doppio di 67, si potrebbe moltiplicare il 2467 per 67, che sarebbe 165289, il che moltiplicato per 2 farà pure 330578 come sopra; onde è fatta benissimo tale moltiplicazione; Anzi in un altra maniera può rifarsi la moltiplicazione, osservando, che il 134 è uguale al 100, al 10, al 20, ed al 4, però moltiplicando il 2467 per 100, sarà 246700, indi per 10 fa 24670, poscia per 20 riesce 49340, e finalmente per 4 sarà 9868, li quali numeri computati insieme,

```
246700
 24670
 49340
  9868
------
330578
```

fan-

fanno l' istessa somma 330578. uguale all' istessa moltiplicazione di 2467, per 134, onde in tutte quelle maniere è ben fatta; ed in simili modi si potrà moltiplicare qualunque numero con un altro, che si proponga.

Si potrebbe ancora rigettare il 9 dalle note di un numero de' due da moltiplicarsi, e fermarne l' avanzo, e similmente dall' altro cavatone l' avanzo del 9, moltiplicare l'uno nell' altro avanzo, di cui pure detratto il 9, si osservi, se nel prodotto della moltiplicazione vi sia lo stesso eccesso del 9. Per esempio, moltiplicando 635 per 24, moltiplicato quello per questo, cioè per 4, e per 2, se ne troverà 15240 prodotto della moltiplicazione; ora l'eccesso del 9 in 635 è appunto 5 (perchè 6, e 3 fanno 9) e nel 24 detto eccesso sarà 6 (composto di 4 e 2) ora 5 via 6 fa 30, in cui l' eccesso sopra il nove è il 3; bisogna dunque vedere, se lo stesso eccesso sia nel numero ridotto della moltiplicazione 15240; In esso 5 e 4, fanno il 9, poscia il 2 con l' uno fa il 3; dunque vi è lo stesso eccesso di 9, che era nel prodotto degli eccessi de' numeri moltiplicandi, onde non è fatta male la moltiplicazione; che se non fosse riuscito il medesimo avanzo, non sarebbe ben fatta. Similmente nella proposta moltiplicazione al di sopra di 2467, in 134, nel primo facendosi 9, il 2 col 7, e riuscendo 10 il 4 col 6, rimane l' eccesso del 9 solamente 1, e nell' altro numero 134, si trova 4, e 3 sette, ed 1, fa 8, il quale moltiplicato per 1, fa pure 8; sicchè bi-

```
  635
   24
-----
 2540
12700
-----
15240
```

bisogna, che pure nel prodotto della moltiplicazione 330578 ci sia il medesimo 8 per eccesso di 9; in fatti 3 e 3 fanno 6, e 5 fanno 11, e 7 farà 18, che ha 2 volte il 9; indi resta l' 8 eccesso di 9, come doveva esservi, e però è ben fatta ivi pure la moltiplicazione.

Che se in uno de' numeri da moltiplicarsi, detratto il 9, nulla vi avanzasse, benchè vi fosse nell' altro numero l' eccesso del 9, non occorre badarci, perchè moltiplicato il 9 per qualunque altro numero riesce pure novesimo, onde ancora nel prodotto della moltiplicazione nulla ci potrà avanzare sopra il 9, come per esempio, volendo moltiplicare 6813 per 24, come che nel primo il 6 e 3 fa 9, ed ancora 8 e 1 fa 9, e nulla ci avanza, però moltiplicando il primo per 4, e poscia per 2, la cui somma riesce 163512, si vede, che in essa pure non vi è avanzo veruno di 9, perchè 6 e 3 fanno 9, e 5 con 2 fanno 7, e con le due unità riescono pur 9, e nulla ci avanza, che se vi fosse qualche avanzo non sarebbe fatta bene la moltiplicazione.

```
  6813
    24
------
 27252
136260
------
163512
```

CAPITOLO VI.

Del dividere i numeri nella medesima specie.

VOlendo dividere qualunque numero maggiore per mezzo di un minore, si principia l' operazione dalla sinistra, cioè dalle prime, non dalle ultime note dell' unità, osservando di applicare il divisore a tante note del numero dividendo, che

che almeno poſſa una volta contenerſi in eſſo, o alquante volte meno di dieci; onde ſi ſottoſcrive la nota del numero ivi trovato, e quell' avanzo, che ſi farà in eſſo, ſi uniſce alle note ſuſſeguenti del propoſto numero, e vi ſi rimette ſotto il diviſore per ricercare quante volte di nuovo contengaſi in eſſo; indi notando pure il numero del diviſore ivi trovato, ed aggiuntone l' avanzo all' altre note ſeguenti, ſe vi ſono, che comprendano eſſo diviſore, ſi fa la ſottoſcrizione dell' altro numero trovatovi; ed in ultimo avanzandone qualche coſa, con eſſa ſe ne farà una frazione denominata dal medeſimo diviſore, come ne' ſeguenti eſempj.

Sia da dividerſi 249 per 3; non entrando il 3 nel 2, biſognerà paragonarlo alli 24, in cui trovandolo 8 volte, perciò dopo una lunetta ſi ſcrive 8; indi ſi paragona il 3 col 9, in cui entrando tre volte, ſi aggiunge dopo l' 8 il 3, e però la diviſione reſta compiuta nel numero 83.

```
249
  3   (83.
```

Volendo poi dividere 17336 per 22, non entrando 22 in 17, ſi paragona al 173, in cui vi entra 7 volte eſſo 22, che ſarebbe 154, e ne avanza 19, al quale aggiuntavi l' altra nota 3, ſi cerca quante volte entri il 22 nel 193, e ſi vede ritenercivi 8 volte, che ſarebbe 176, onde ne avanza 17, però aggiuntavi la nota 6 ritorna 176, in cui di nuovo ſi comprende 8 volte il 22, però dopo la lunetta ſi dovranno ſcrivere il 7 e l' 8 due volte, onde la diviſione ſarà 788 ſenza veruno avanzo.

```
17336
 22     (788
 193
  22
  176
   22
```

Se

Se poscia si divide 2594 per 12, questo nel 25 entra due volte, e ne avanza 1, scrivasi però dopo la lunetta il 2; ed all' 1 aggiunto il 9 si fa 19 nel quale il 12 entra una volta, però dopo il 2 si scrive 1, ed avanzandoci 7 aggiuntovi il 4, riesce 74, in cui trovasi il 12 sei volte, onde si scrive dopo il 21 il 6, ma esso 12 via 6 facendo 72, ne avanzano 2, che però alla divisione 216 bisognerebbe aggiungervi per frazione ancora $\frac{2}{12}$, i quali divisi ambidue per mezzo, si dovranno fare la stessa frazione $\frac{1}{6}$; onde la divisione di 2594 per 12 riesce $216\frac{1}{6}$, che dirassi dugento sedici, e un sesto.

```
2594
12
 19      (216 1/6
 12
  74
  12
```

Si osservi però, che la divisione di 17336 per 22 poteva farsi di 8668 per 11, e quella di 2594 per 12, si sarebbe potuta fare del numero 1297 per 6; imperocchè li due numeri proposti essendo pari, si possono ambidue dividere per mezzo, e se riuscissero di nuovo pari, si dovrebbero di nuovo ambidue dimezzare, fino a tanto, che uno di essi riuscisse dispari, essendo che la stessa quantità riesce nella divisione di qualunque numero in un altro, come riuscirebbe dal doppio di quello, nel doppio di questo, o dal quarto dell'uno nel quarto dell' altro, o di qualsivoglia parte dell' uno nella parte simile dell' altro; onde ancora, se tutti due i numeri potessero dividersi ancora per 3, o per 5, o per 9, o per 10, o per 100. *ec.* basta fare la divisione di quelle parti in vece de' dati numeri interi: Così proponendosi la divisione di

2430

2430 per 50, basta fare la divisione di 243 per 5, che sarà $48\frac{3}{5}$, essendo 5 via 48 il 240, cui rimane il 3 divisibile per 5, e ciò sarà l' istessa divisione di 2430 per 50; similmente proponendosi la divisione di 963 per 213, divisi per 3 ambidue questi numeri, diviene il primo 321, il secondo 71, e quello diviso per questo darà $4\frac{37}{71}$, perchè 4 via 71 fa 284, al quale aggiunto il 37 fa 321.

E chi volesse dividere 3800 per 700., basterà dividere 38 per 7, che sarà $5\frac{3}{7}$, imperocchè 7 via 5 fa 35, e dal 38 ne avanza il 3, che importa quella frazione $\frac{3}{7}$ da aggiungersi al 5.

Essendo da dividersi un numero grande con un altro di molte note, conviene applicare questo ad altrettante note di quello, se pure non riuscisse minore la prima nota del dividendo della prima nel divisore, altrimenti si porranno le note di questo, sotto un alquanto maggior numero di quello, per osservare, che ci entri dentro; e se vi fosse contenuto una volta sola, si scriverebbe dopo la lunula una unità; se poi vi entra più volte, si moltiplichi il divisore per 2, o per 3, o per altro numero, osservando se entra in quella parte del numero dividendo; e quello, che ci avanza si aggiunga ad un altra delle note seguenti, e ridottovi sotto lo stesso divisore, si proseguisca la divisione, osservando come entri questo in quello, e similmente si proseguisca, come apparirà nel seguente esempio.

Sia da dividersi il numero A per il numero B; vedendoli ambidue pari, si divideranno per mezzo tutti

A	7 4 2 8 0 6 2 5 3 8
B	6 1 0 2 4 5 7 2
C	3 7 1 4 0 3 1 2 6 9
D	3 0 5 1 2 2 8 6

ti e due, sicchè da A ne provenga C, e da B ne risulti D; ma osservando che sono ancora C, e D compresi da note, che fanno il 9 senza veruno eccesso (come ancora così erano li primi A e B) converrà ancora dividerli per 9, che riusciranno questi altri due E, ed F; però si dividerà questo da quello; dunque si sottoponga l'F al G, in cui sono altrettante note di E, quante sono nel divisore, e si vedrà, che vi entra una volta sola, onde dietro la lunula si scrive 1, e cavandone ciò, che di più vi rimane H, gli si aggiunge l' altro numero di E, che è il 4 delli due tralasciati,

E	6 1 2 6 7 0 1 4 1
E	3 3 9 0 2 5 4
G	6 1 2 6 7 0 1
F	3 3 9 0 2 5 4
	(18o
H	2 7 3 6 4 4 7
K	2 7 3 6 4 4 7 4
F	3 3 9 0 2 5 4
L	2 7 1 2 2 0 3 2
M	2 4 2 4 4 2
N	2 4 2 4 4 2 1

e fatto così il numero K, gli si pone sotto il medesimo F, che ci si vede contenuto 8 volte, però nella lunula si aggiunge l' 8, e perchè l'ottuplo di F sarà L, e questo tolto dal K riesce l' M, al quale aggiunta l' ultima nota 1 del numero E, che sarà il numero N, in cui non entrando il numero F, maggiore di esso, conviene aggiungere nella lunula lo zero; sicchè 180 sarà la quantità de' numeri interi della divisione, ma bisognerà aggiungerci la frazione di N diviso per F, cioè tutta la divisione de' suddetti numeri cioè di A per B, dovrà essere per appunto 180. $\frac{2424421}{3390254}$

$$\frac{N\ 2424421}{F\ 3390254}$$

Vo-

Volendo poi dividere un numero per 10. basta separarne l' ultima nota, da cui si farà la frazione del divisore 10. Per esempio, volendo dividere per 10 il 253 basterà scrivere $25\frac{3}{10}$, e volendo dividere per 10 il 3457, si averà per divisione $345\frac{7}{10}$. E se un numero si vorrà dividere per 100, bisognerà separarne le due note ultime, colle quali si farà pure la denominazione di esso divisore 100; così 849178 diviso per 100 sarà $8491\frac{78}{100}$, ma questi 78, e 100 potendosi dividerli pel mezzo, converrà farne la divisione, e ne nascerà la frazione $\frac{39}{50}$. Così pure l' 8497 diviso per 100, riuscirà solamente $84\frac{97}{100}$; e similmente se si ha da dividere un numero per 1000, dovranno separarsi da esso le tre ultime note, le quali faranno la frazione da mille denominata, come dovendosi dividere per mille il numero 458937, si dovrà fare $458\frac{937}{1000}$ per tale divisione; e così in altre simili.

Per la riprova poi della quantità di essa divisione, basterà moltiplicare il quoziente per il divisore, e vedere se il prodotto sia il medesimo numero proposto a dividersi, come certamente esser deve, se la divisione sia ben fatta: Per esempio, se dividendo 249 per 3, si trova 83, bisogna, che 83 per 3 moltiplicato faccia pure 249; e così pure se 17336 diviso per 22 fa 788, converrà che il 788 moltiplicato per 22, faccia 17336; e se vi sono alla divisione delle frazioni, oltre il prodotto del divisore co' numeri interi della divisione, vi si aggiunge ancora il numeratore, che è al di sopra nella frazione; come per esempio, avendo diviso 321 per 71, onde si ritrovò $4\frac{37}{71}$, basterà moltiplicare il 71 per 4, che farà 284, ed aggiuntovi

tovi li 37, ne proviene lo stesso 321, come di sopra si è detto.

Similmente, quando sia fatta con esattezza la divisione, bisogna che l' eccesso del 9 del divisore, moltiplicato con l' eccesso del 9 del quoziente, faccia lo stesso eccesso del 9, che ha il numero, il quale fù divisibile. Per esempio 1104 per 23 diviso, ci dà per quoziente il 48; in questo l' eccesso del 9 sarà 3, e nel divisore è 5, ora 3 via 5 fa 15, che è un eccesso 6 di 9, ma ancora nel dividendo 1104 si trova per eccesso di 9 il 6, dunque è ben fatta la divisione; ma se pure nel quoziente vi è una frazione, al prodotto dell' eccesso di 9 del divisore, con quello del numero sciolto nella divisione, gli si aggiunga l' eccesso del 9, che ha il numeratore della frazione, e questa somma dovrà essere uguale all' eccesso di 9, che ha il numero dividendo: Per esempio, si divida 578 per 13, si troverà il quoziente 44 $\frac{6}{13}$, dunque l' eccesso del divisore 13 sopra il 9 essendo 4, e l' eccesso di 44 essendo 8, si moltiplichi 4 via 8, fa 32, il cui eccesso sopra il 9 è 5, aggiunto a questo 5 il 6, si farà 11, cioè l' eccesso di 9 sarà 2, il che pure si trova nel dividendo 578, perchè 5, e 7 fa 12, e 8 fa 20. Così pure dividendosi 1350 per 23, si troverà essere 58 $\frac{16}{23}$ il suo quoziente; ed essendo l' eccesso di 9 nel 23 il 5, nel 58 il 4, e 5 via 4 facendo 20, si ha per tale eccesso di 9 il 2, al quale aggiunto l' eccesso di 16, che è 7, si fa per appunto 9, ed ancora il dividendo ha il 135 per 9 senza veruno eccesso, perciò quella divisione dovrà essere ben fatta, non essendovi nel quoziente moltiplicato col divisore, e composto

posto col numero superiore della frazione, veruno eccesso del 9, come non vi è nel dividendo. Che se il dividendo fosse stato 1352, con lo stesso divisore 23, sarebbe stato il quoziente 58 $\frac{18}{23}$, ed esso numero 18 non avendo eccesso di 9, non occorrerà aggiungerlo al prodotto dell' eccesso di 23 coll' eccesso di 58, che abbiamo veduto esser 2, come appunto nel dividendo 1352 vi è l' eccesso di 2 sopra il 9.

CAPITOLO VII.

Del moltiplicare i numeri di specie diversa.

QUesta moltiplicazione de' numeri di specie diversa è assai più difficile di quella de' numeri della medesima specie; imperocchè essendo i numeri composti di varie specie, converrà prima ridurre ciascuno alla specie infima, e poscia moltiplicarli insieme, quindi per via della divisione ridurre il prodotto a' termini di ciascuna specie naturale. Ma però conviene ancora osservare, che moltiplicando qualche quantità continua espressa in detti numeri, con un altra quantità continua parimente in numeri espressa, il prodotto non sarà una quantità del medesimo ordine, con ciascuno de' numeri producenti; ma d' un ordine più alto, paragonandosi questo a quello, come una superficie alla linea, che gli serve di semplice lato, o come il corpo ad un piano, che gli serve di superficie.

Così per esempio, 3 braccia di lunghezza, se si moltiplicassero solamente per un numero 4, certo riuscirebbero 12 braccia di essa lunghezza; ma

ſe quelli ſi devono moltiplicare per 4 braccia pure di larghezza, ne doveranno reſultare 12 braccia quadre, che ſaranno d' ordine ſuperiore alle 12 braccia lineari eſprimenti la ſola lunghezza; ſimilmente 8 ſoldi di lunghezza moltiplicati per 3 ſoldi pure di larghezza, faranno 24 ſoldi ſuperficiali; e non è già vero, che queſti ſoldi 24 equivagliano ad un braccio di ſoldi 20 con 4 ſoldi di più del ſuo genere, perchè non baſtano ſoldi 20 a fare un braccio quadro, o ſuperficiale, ma ci vogliono ſoldi 400; e la ragione ſi è, perchè 20 ſoldi di lunghezza, che fanno nella lunghezza un braccio, moltiplicandoli per 20 altri ſoldi, danno il valore d' un braccio quadrato, eſpreſſo con ſoldi 400 ſuperficiali; ſimilmente facendoſi un ſoldo di lunghezza con 12 danari, ſe queſti ſi moltiplicheranno con altri 12 danari, faranno un ſoldo quadrato, col valore di 144 danari di ſuperficie, onde ſiccome un braccio quadro ſi fa con 400 ſoldi quadrati, biſogna che nello ſteſſo valore di un braccio quadro vi ſi includano 57600. danari ſuperficiali.

Poſto queſto avvertimento, prendiamo un eſempio. Sia una Camera di lunghezza braccia 8 ſoldi 5 e danari 6, e ſia la ſua larghezza braccia 7 ſoldi 6 e danari 8, e ſi convenga moltiplicare quella in queſta per ricavarne la quantità del pavimento, che ſarà compoſto di alquante braccia quadre, con alcuni ſoldi, e danari quadrati, e fatta la moltiplicazione ſi trova, che ſaranno braccia quadre 60 ſoldi quadri 248, e da-

Braccia.	*Soldi.*	*Danari.*
8.	5.	4
7.	6.	8
60.	248.	128

danari quadri 128, imperocchè avendo ogni soldo danari 12, ed ogni braccio soldi 20, averà il braccio danari 240, onde braccia 8 averanno danari 1920, e li soldi 5 averanno danari 60, a' quali aggiunti li danari 4 della lunghezza, il tutto sarà danari 1984; ma quanto alla larghezza, braccia 7 saranno danari 1680, e li soldi 6 ne vengono danari 72, a' quali aggiunti li danari 8, riesce il tutto danari 1760; però moltiplicando questi 1760, con quelli danari 1984, ne risultano danari quadrati 3491840.

```
1920
  60
   4
----
1984
```

```
1680
  72
   8
----
1760
```

Per determinare poi quante braccia quadre, e quanti soldi quadrati, e quanti danari quadrati ne risultino in quella superficie del pavimento della camera, essendo ogni braccio quadro composto di 57600 danari quadrati, bisogna dividere esso 3491840 per 57600, onde ne procederanno braccia quadre 60, importando queste danari quadri 3456000, ed il residuo sarà 35840, che diviso per 144 danari, valore di ciascun soldo quadrato, si troverà per quoziente 248 soldi quadrati, importando questi danari quadri 35712, onde poi rimangono 128 danari quadrati, essendo manifesto, che appunto 3456000 (che sono 60 braccia quadre) con 35712 (che sono 248 soldi quadri) e con li 128 danari quadri sommati insieme, fanno il numero 3491840 di danari quadrati, che si trovò in detta moltiplicazione; e però fù ben fatta,

```
3456000
  35712
    128
-------
3491840
```

ta, corrispondendo benissimo insieme tutti i calcoli di sopra esposti.

Nel trattato aritmetico di Giuseppe Maria Figatelli, ricorretto, ed accresciuto da Gaetano Guidi Bolognese, verso il fine del Capitolo terzo, si apporta, che moltiplicando le lire 4, soldi 5, e danari 6 con lire 3 soldi 10, e danari 8; ne debba succedere lire 15, soldi 2, e danari 1 con $\frac{1}{5}$, il che io mostrerò esser falso, dovendone piuttosto riuscire lire 15, e soldi quadri 42; imperocchè le lire comprendendo 20. soldi, e li soldi 12 danari, è certo, che lire 4 sono soldi 80, e però danari 960, li soldi 5 sono danari 60, ed aggiunti li danari 6, la somma di essi sarà danari 1026; poscia le lire 3 essendo soldi 60 sono danari 720, li soldi 10 sono pure 120 danari, ed aggiunti danari 8, la loro somma sarà 848 danari; però moltiplicando quelli con questi, si fanno 870048 danari quadrati, perchè 848 in 1000, fa 848000, in 20 fa 16960, ed in 6 fa 5088, la somma de' quali è 870048, ed avendo la lira quadra 57600 danari quadrati, si vede, che questo è in quello 15 volte, perchè moltiplicato 57600 in 15 farà 864000, e tolto questo da 870048, ne rimane

```
lire  4.  5. 6
lire  3. 10  8
--------------
lire 15. 42 —
--------------
       960
        60
         6
      ----
      1026

       720
       120
         8
      ----
       848

      1026
   in -848
   -------
    848000
     16960
      5088
   -------
    870048
```

6048

6048; ma il soldo quadro ha 144 danari quadrati, che moltiplicati in 42 fanno pure 6048; dunque la moltiplicazione di lire 4 soldi 5, e danari 6 in lire 3 soldi 10, danari 8, fa lire quadre 15, e soldi quadri 42, come abbiamo detto.

	57600 *in* 15
	804000
	870048
meno	864000
rimane	6048
uguale a	144 *in* 42

Si può ancora in un altra maniera fare tal moltiplicazione, essendo ogni soldo il vigesimo della lira, ed un danaro è $\frac{1}{240}$ di essa lira, perciò lire 4 soldi 5, e danari 6, sono lire 4 e $\frac{5}{20}$ e $\frac{6}{240}$, cioè lire 4 $\frac{1}{4}$ ed $\frac{1}{40}$, che sarà pure 4 $\frac{11}{40}$ (poichè $\frac{1}{4}$ è $\frac{10}{40}$) similmente lire 3 soldi 10 e danari 8, saranno lire 3 $\frac{10}{20}$ e $\frac{8}{240}$, cioè lire 3 $\frac{1}{2}$, e $\frac{1}{30}$, che saranno lire 3 $\frac{16}{30}$ (perchè $\frac{1}{2}$ è $\frac{15}{30}$) o dicasi piuttosto lire 3 $\frac{8}{15}$; e moltiplicando le lire 4 $\frac{11}{40}$ in 3 $\frac{8}{15}$, si averanno lire 12 $\frac{32}{15}$ è $\frac{33}{40}$ ed $\frac{88}{600}$; La frazione $\frac{32}{15}$ e 2 $\frac{2}{15}$, la $\frac{88}{600}$ sarà $\frac{11}{75}$; dunque essa moltiplicazione averà lire 14 $\frac{2}{15}$ e $\frac{33}{40}$ ed $\frac{11}{75}$; ma $\frac{2}{15}$ è uguale a $\frac{10}{75}$ (essendo il 15 via 5 uguale a 75, ed il 2 via 5 uguale a 10.) dunque riesce lire 14 $\frac{21}{75}$, e $\frac{33}{40}$; ma il $\frac{21}{75}$ è lo stesso che $\frac{7}{25}$ (dividendo per tre il 21, ed il 75.) e $\frac{7}{25}$ con $\frac{33}{40}$ è $\frac{1105}{1000}$, perchè la somma di due frazioni può farsi moltiplicando il numeratore di ciascuna col denominatore dell' altra, e ciascuno denominatore con l' altro denominatore (come se ne parlerà nel Capitolo XI.) onde 7 via 40 fa 280, e 33 via 25 fa 825, che aggiunto all' altro 280 fa per l' appunto 1105, ed il 40 via 25 fa 1000, e tale frazione $\frac{1105}{1000}$ è uguale ad 1 e $\frac{105}{1000}$; anzi 1 e $\frac{21}{200}$, dunque la moltiplicazione fa lire 15 $\frac{21}{200}$,

ma $\frac{21}{200}$ è lo ſteſſo che $\frac{42}{400}$, ed ogni ſoldo quadrato è la quadricenteſima parte della lira quadra, ſiccome il ſemplice ſoldo è la parte vigeſima della ſemplice lira, eſſendo appunto il quadrato di 20. eſſo 400. dunque tale moltiplicazione importa lire quadre 15, e ſoldi quadri 42, come ſi era nell' altra maniera dimoſtrato.

Se poi un numero compoſto di più ſpecie doveſſe moltiplicarſi per un ſemplice numero, come ſe ſcudi 15 lire 4 ſoldi 13, e danari 8 doveſſero moltiplicarſi per 6, allora non eſce dall' ordine ſuo la ſpecie della quantità moltiplicata, onde baſta moltiplicarne ciaſcuna ſpecie per il numero dato, cominciando però dall' inferiore; e ſecondo il ſuo accreſcimento riducendolo nelle ſpecie ſuperiori. Così 6 via 8 fa 48 danari, che importa 4 ſoldi, ciaſcuno de' quali è compoſto di danari 12; e 4 via 12 è pure 48, indi moltiplicando ſoldi 13 per 6 ne riſultano 78 ſoldi, a' quali aggiunti gli altri 4, rieſcono 82 ſoldi, de' quali ogni vigeſimo facendo una lira, ne rieſcono lire 4 e ſoldi 2, poſcia le lire 4 moltiplicate per 6 fanno lire 24, e con le altre 4 rieſcono lire 28, delle quali ogni 7 lire facendo lo ſcudo Fiorentino, biſogna importino ſcudi 4; e finalmente moltiplicando per 6 gli ſcudi 15 rieſcono ſcudi 90, ed aggiunti gli altri 4 ſaranno ſcudi 94; dunque moltiplicati pel numero 6 gli ſcudi 15, lire 4, ſoldi 13, e danari 8, ne rieſcono ſcudi 94, e ſoldi 2 ſolamente, e queſto è il prodotto di tale moltiplicazione, la quale non può farſi più facilmente, ſe non in queſta maniera; e ſimilmente potrà farſi qualunque altra molti-

pli-

plicazione di qualsivoglia altra specie in qualsivoglia numero dato.

Per via dell' eccesso di 9 può mostrarsi pure, non essere mal fatta tale moltiplicazione; si osservi però, che l' eccesso sopra il 9 ne' soldi deve moltiplicarsi per 3, avendo ciascun soldo danari 12, il cui eccesso sopra 9 è 3, l' eccesso poi di 9 nelle lire, che hanno 20 soldi, deve moltiplicarsi per il doppio di 3, cioè per 6; l' eccesso degli scudi, che 7 volte ciascuno ha la lira, deve moltiplicarsi per 7 in 6, che sarebbe 42, onde esso eccesso è il 6; dunque essendo proposti gli scudi 15, il cui eccesso sopra 9 è 6, essendo 6 via 6 uguale a 36, non vi è eccesso di 9; ma per le lire 4, moltiplicato il 4 in 6, fa 24, dove pure vi è l' eccesso di 6; ne' soldi 13 l' eccesso è 4, che moltiplicato per 3 fa 12, che pure ha l' eccesso 3, e con l' antecedente eccesso 6 delle lire fa 9, il che si lascia; dunque solamente ci resta il numero 8 de' danari, che moltiplicato pel numero moltiplicante, cioè 6, farebbe 48, che è un eccesso sopra al 9 solamente di 3. Quanto alla moltiplicazione, che da scudi 94, e soldi 2; l' eccesso degli scudi sopra 9 è 4, che moltiplicato in 6 fa 24, che pure ha l' eccesso di 6, e l' eccesso 2 de' soldi moltiplicato in 3 fa pur 6, dunque la somma di 6, con l' altro 6 sono 12, che ha l' eccesso pure di 3, come di sopra si è veduto competere al prodotto di scudi 15 lire 4 soldi 13, e danari 8 moltiplicati in 6; però riesce ben fatta quella moltiplicazione.

CA-

CAPITOLO VIII.

Del dividere i numeri di più ſpecie con un numero ſemplice, o con numeri di altrettante ſpecie.

DOvendoſi per eſempio convenire 7 perſone alla paga di lire 26, ſoldi 9, e danari 8, conviene dividere la ſomma di queſte ſpecie pel numero 7, acciò ſi ſappia quello, che ciaſcheduna di tali perſone doverà pagare. Primieramente diviſe le lire 26 per 7, toccheranno lire 3 per ciaſcheduno, perchè 3 via 7 fa 21, ed avanzandoſi 5 lire, queſte ſi riſolvono in tanti ſoldi, che ne importeranno 100, ed aggiuntovi il numero de' ſoldi 9, biſognerà dividere 109 per 7, che riuſciranno ſoldi 15, i quali da ciaſcheduno pagandoſi ſaranno 105, dunque ne avanzeranno ſoldi 4, che riſoluti in danari ſaranno 48, ed aggiunti gli altri 8 danari fanno 56, i quali diviſi per 7 riuſciranno appunto 8 danari per ciaſcheduno; ſicchè ogni perſona dovrà pagare lire 3 ſoldi 15, e danari 8. onde ſarà ben fatta la propoſta diviſione.

Se poi vi avanzaſſero altri danari, biſognerà fare di quell' avanzo una frazione denominata dal numero della diviſione. Per eſempio, ſe la ſteſſa paga di lire 26 ſoldi 9, e danari 8 ſi doveſſe dividere ſolamente per 3 perſone; le lire 26 diviſe per 3 danno lire 8, che è il terzo di 24; e ne avanzano 2, che ridotte in ſoldi ne fanno 40, cui aggiunto il 9, e diviſo il numero di 49 in 3, ne vengono 16, che ſono il terzo di 48, onde

avanza

avanza un soldo, il quale avendo 12 danari con gli altri 8, riescono 20,.e questi divisi per 3, ne risultano 6, che sono il terzo di 18, ed avanzano 2 danari, il quale avanzamento diviso per 3 ci da la frazione di $\frac{2}{3}$; sicchè qualunque persona dovrà pagare lire 8, soldi 16, e danari 6 con $\frac{2}{3}$, e così sarà compiuta la divisione, la quale se si dovesse fare da essi più volte, per esempio qualunque mese, dovrebbe ciascuno in tre mesi dare tutta la paga di lire 26, soldi 9, e danari 8.

Dovendosi poi dividere un numero di più specie, con un altro di altrettante specie, converrà ridurre questo, e quello al numero della loro infima specie, e poi fatta la divisione, ridurre il quoziente nelle sue specie. Per esempio, il piano di una superficie di braccia quadre 60, con soldi quadri 248, e danari quadri 128, si vorrebbe dividere per la lunghezza di un lato di braccia 7 soldi 6, e danari 8; si riduca primieramente la quantità dividenda, nel numero dell' infima sua specie, cioè de' suoi danari superficiali, e poscia la quantità dividente si riduca nel numero inferiore delli danari semplici; sicchè avendo ogni braccio quadro 57600 danari superficiali, bisogna che le braccia 60 ne contengano 3456000, ed i soldi quadri avendone ciascuno 144, i soldi 248 conterranno danari superficiali 35712, ed aggiunti gli altri danari 128, la somma di tutti saranno danari superficiali appunto 3491840; similmente ogni braccio di lunghezza avendo 240 danari semplici, nelle braccia 7 ve ne saranno

3 4 5 6 0 0 0
3 5 7 1 2
1 2 8
3 4 9 1 8 4 0

1680

1680, e ne' soldi 6 (essendovi 12 danari per ciascheduno) importeranno danari 72, onde quelli e questi, con gli altri 8 danari, fanno danari 1760; dividasi adunque il primo 3491840, con questo secondo 1760, anzi essendovi il zero in ambidue, può levarsi, ed i rimanenti numeri 349184 e 176 potendo ancora esser divisi ambidue per 16, riuscirà quello 21824 e questo 11, perciò basterà dividere esso 21824 per 11, e ne verrà appunto 1984; questi adunque semplici danari 1984, si veda quante braccia semplici, e quanti soldi importino; ogni braccio avendone 240, se ne troveranno ivi braccia 8, che importano danari 1920, e ne rimangono 64, e questi divisi per 12, che compongono il soldo, se ne trovano soldi 5 (che fanno 60 danari, e ne restano danari 4; dunque la superficie composta di braccia quadre 60, e soldi quadri 248, e danari superficiali 128, divisa per uno de' suoi lati cioè per braccia 7 soldi 6 e danari 8 di lunghezza, ci da l' altro lato di braccia semplici 8, soldi 5, e danari 4, che tale è la divisione fatta esattamente con questo metodo, come in fatti si vedrà moltiplicando le braccia 7, soldi 6, e danari 8, in braccia 8 soldi 5 e danari 4, dal che ne riuscirebbero appunto braccia quadre 60, e soldi quadri 248 con danari superficiali 128, imperocchè si è veduto essere le braccia 7 soldi 6 e danari 8 il numero de danari 1760, poscia le braccia 8 soldi 5 e danari 4, la somma di danari 1984, onde poi moltiplicando 1984 per

1680
72
8
1760

1920
60
4
1984

1760

1760 (1760 via 4 fa 7040 , lo ſteſſo via 80 fa 140800 , il medeſimo per 900 è 1584000, ed eſſo per 1000 fa 1760000) ne proviene 3491840 , qual ſomma abbiamo veduto, che corriſponde appunto a quella de' danari ſuperficiali di 60 braccia quadre, di ſoldi 248, e di danari 128; onde è ben fatta la diviſione, corriſpondendo a tale moltiplicazione.

7040
140800
1584000
1760000
3491840

Se poi nel dividere la ſomma di quei danari ſuperficiali, con l' altra ſomma de' ſemplici vi avanzaſſe qualche altro numero, gli ſi aggiungerebbe la frazione del numero reſiduo, denominata dal diviſore, come ſi è detto di ſopra. Per eſempio eſſendo la ſuperficie 3 braccia quadre, ſoldi 4 quadri, e danari ſuperficiali 24, dividendola per un lato di braccia 1 ſoldi 13, e 4 danari ſemplici; le 3 braccia quadre ſaranno di danari ſuperficiali 172800 (eſſendo ogni braccio di 57600 danari, il cui triplo è il numero ſopra addotto) li 4 ſoldi ſaranno danari 576 (avendone ognuno 144, che quadruplicato fa il ſuddetto numero) però agiunti li danari 24 ſi ha la ſomma di danari ſuperficiali 173400. E quanto alle braccia di lunghezza, che è un ſolo, conterrà danari ſemplici 240, e li ſoldi 13 avendo ciaſcuno danari 12, ne importeranno 156, ed aggiunti li 4 danari fanno in tutto 400, però dividendo il numero 173400 per 400, cioè tolti di quà, e di là li due zeri, baſta divi-

172800
576
24
173400

240
156
4
400

videre 1734 per 4, anzi diviso l'uno, e l' altro per 2, si dividerà il numero 867 per 2, dal che ne risulta 433 $\frac{1}{2}$, onde levati 240 si ha un braccio di lunghezza, e rimangono danari 193 $\frac{1}{2}$, de' quali vi saranno soldi 16; perchè ogni soldo avendo 12 danari, ne provengono alli 16 soldi i danari 192, onde rimane, semplici danari 1 $\frac{1}{2}$; sicchè l'altro di tale superficie divisa, dovrà essere braccia 1, soldi 16, e danari 1 $\frac{1}{2}$; il che dovea ritrovarsi per questa divisione.

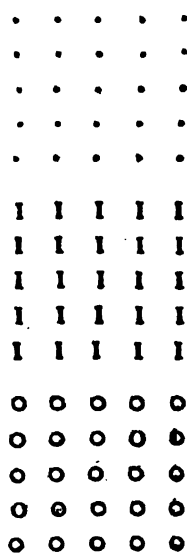
E può ancora osservarsi l'esattezza della medesima divisione, se viceversa moltiplicando il quoziente col divisore, ne risulterà la stessa quantità, che fù proposta a dividersi; come moltiplicando braccia 1 soldi 16 danari 1 $\frac{1}{2}$, per braccia 1. soldi 13, e danari 4, ne risulteranno braccia quadre 3 soldi 4, e danari superficiali 24, che erano dati a dividersi; imperocchè nel quoziente sono danari 433 $\frac{1}{2}$, e nel divisore danari 400, e questi prodotti in quelli fanno appunto danari superficiali 173400, che si è veduto essere nella quantità proposta a dividersi.

Anzi vi è il medesimo eccesso di 9 tanto nel 173400, che è 6 (perchè 4 e 3 fa 7, ed altri 7 fanno 14, e con l' unità 15, ed è il 5 con l' 1 uguale a 6) quanto nel prodotto di 433 $\frac{1}{2}$ in 400, perchè il 4 con li due 3 fa 10, che è 1, ed il 4 preso dal 400 moltiplicato in 1 $\frac{1}{2}$, fa 4, e 2, che sono pure uguali a 6, come nell' altro prodotto.

CA-

CAPITOLO IX.

Del cavare la radice quadra d' un numero.

QUando ſi moltiplica un numero per ſe ſteſſo, il prodotto diceſi *Quadrato*, perchè può diſporſi con le ſue unità in forma perfettamente quadra, cioè con i lati compoſti del medeſimo numero. Così il 25 è numero quadrato, riſultando dal 5 moliplicato in ſe ſteſſo, ed eſſo 5 diceſi la radice quadra del medeſimo quadrato 25; onde può diſporſi in figura quadra, di cui ciaſcun lato ſia compoſto di cinque punti (ſe tutti gli altri ſono punti) o di cinque unità, o di cinque cifre (eſſendo l' altre di mezzo parimente unità, o parimente cifre) come nelle figure quì addotte, che ne compongono 25 punti, o 25 unità, o 25 zeri, col lato di 5, che ne è la radice; onde il cercare la radice quadra di un numero propoſto è lo ſteſſo, che voler ritrovare qual ſia quel numero, che moltiplicato in ſe ſteſſo farebbe appunto quel tale numero propoſto.

· · · · ·
· · · · ·
· · · · ·
· · · · ·
· · · · ·

1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1

0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0

Non può eſſere però la radice quadra di qualunque numero, ma ſolamente de' numeri quadrati; ad ogni modo ſe il propoſto numero non è veramente quadrato, ſe ne può cercare una proſſima radice, non però eſatta, ma tale, che moltiplicata in ſe ſteſſa fa un numero alquanto proſ-

ſimo

ſimo a quello, di cui cercavaſi la radice, che mai non può eſſere preciſa, benchè accreſciuta, o diſtratta da qualſivoglia frazione.

Primieramente convien ſapere, quali ſiano i numeri veramente quadrati, che corriſpondono alle prime note numeriche, perchè da queſti ſi cava lume per ritrovare la radice quadra, eſatta, o proſſima di qualunque altro numero maggiore; ſi oſſervi però queſta prima ſerie delle radici, e de' loro quadrati nella preſente Tavola.

Radici	1.	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Propoſto quindi un numero, di cui ſi vuole cavare la radice quadra, primieramente ſi punteggi quel numero, cominciando dall' ultima nota della parte deſtra, e procedendo verſo la ſiniſtra punteggiandole non tutte, ma alternativamente, cioè una sì, ed una nò, e quanti punti in eſſo numero riuſciranno eſſere notati, tante note dovrà avere la radice quadra, che vi ſi cerca.

Quindi ſi eſamini dalla ſiniſtra il primo punto, che comprenderà una ſola nota, o pure due inſieme, e ſi riguardi quale ſia il maſſimo quadrato di quelli della Tavoletta antecedente, che incluſo ſi ritrovi in detto punto, e ſe vi ha qualche eccesso, ſi noti ſotto, e dietro alla lunetta ſcrivaſi la radice del quadrato, che ivi fù ritrovato.

Queſta

Questa stessa radice poi si raddoppj, e con essa così raddoppiata si divida il numero composto da quest' eccesso notato di sotto, e dalla susseguente prossima nota non punteggiata nel proposto numero, ed il quoziente si scriva dietro la lunetta appresso la prima nota ivi posta. Quindi unito lo stesso quoziente colla seconda nota ritrovata, si moltiplichi tutto questo complesso per il medesimo quoziente, sottraendone il prodotto dalle note proposte nel numero fino al secondo punto, notandovi sotto l'eccesso, che forse vi avanzasse.

Al medesimo modo si cercherà la terza nota della radice, similmente raddoppiando le due note già trovate; per cui si divida il numero composto dell' ultimo eccesso, e della prossima nota nel numero proposto; ed il quoziente scrivasi pure dietro la lunetta, appresso le due precedenti note, ed anche scrivasi appresso al detto divisore, moltiplicando tutto ciò, che ne risulta per lo stesso quoziente, e sottraendo il prodotto dalle note del numero proposto continuate fino al terzo punto, e così facendo di mano in mano, sino che all' ultimo, fatta la sottrazione, nulla rimangavi d' eccesso, il che succederà ogni qualvolta il proposto numero sia veramente quadrato; ma se tale non fosse, ci sarebbe l'ultimo avanzo, di cui dovrebbe farsi una frazione denominata dal doppio dell' intera radice fino allora trovata, per averne una radice prossima alla vera composta di quelle note radicali ritrovate, e di tale frazione; il che potrà bastare, non potendosi averne la radice precisa.

Si deve però avvertire primieramente, che ſe il diviſore non entraſſe pure una volta in quel numero che occorre dividere, doverà notarſi uno zero nella radice, e tirare avanti l' operazione. Secondariamente ſe lo ſteſſo diviſore entraſſe più di nove volte nel numero, che occorre dividerſi, non ſi potrà notare giammai per quoziente verun numero maggiore di 9; ma queſto ſolo, facendovi rimanere nell' eccedo ancora tutto ciò, che ha più di nove volte in ſe il detto quoziente. In terzo luogo ſi avverta, che ſe fatta la moltiplicazione come ſopra, il prodotto riuſciſſe maggiore del numero da cui doveva ſottrarſi, allora biſognerà ſcrivere per quoziente un numero proſſimamente minore, ma queſte regole meglio ſi ſchiariranno con alcuni eſempj.

59049	(243
4	
190	44·4
176	176
1449	
1449	483·3
0000	1449

Sia propoſto il numero 59049, da cui ſi deſideri cavare la radice quadra. Punteggiſi l' ultima nota 9, e laſciata ſenza punto la penultima 4, ſi punteggi il zero antecedente, e parimente laſciato il 9, che ci è avanti, ſi faccia il punto al precedente 5. Poſcia ſi eſamini eſſo 5 corriſpondente al primo punto, e ſi vegga quale è il quadrato

drato

drato contenuto in esso, che si troverà essere 4, la cui radice è 2, però questa radice scrivasi appresso la lunetta, ed avanzando nel 5 l'unità sopra il 4, aggiuntavi la seconda nota 9 si ha 19; il che dividendosi pel doppio della radice 2, cioè per 4, ne riesce altresì 4, essendo esso quattro volte nel 19; però nella lunetta dopo il 2 scrivasi il 4; indi scritto da parte il 4 divisore, e postovi allato l'altro 4 quoziente, si averà 44, il quale moltiplicato per lo stesso 4 quoziente diviene 176, e questo sottratto dalle tre note 190 (aggiunto al 19 il zero seguente) rimane l'eccesso 14, cui aggiunta la seguente nota 4, si fa 144, e questo deve dividersi per il doppio delle due note radicali 24, che saranno 48, e diviso quel 144 per 48, si trova essere per l'appunto il 3, onde si scrive nella lunetta la terza nota 3, e scritto da parte il 48 divisore, e messovi allato il tre quoziente, si averà 483, il quale moltiplicandosi per lo stesso 3 quoziente, diviene 1449, ed essendo ancora quel numero 144 con la seguente nota 9 ultima del proposto numero, uguale allo stesso 1449, sottratto questo da quello, nulla vi rimane, e però il numero 243 dovrà essere la vera radice quadra del proposto numero 59049. Il che dovea ritrovarsi.

285156

285156	(534
25	
351	103 - 3
309	309
4256	
4256	1064 - 4
0000	4256

Dato parimente il numero 285156, volendo trovarne la radice quadra, si punteggiano li numeri 6, 1, e 8; indi cominciando dal 28 a considerare qual numero quadrato sia in esso si trova essere 25, la cui radice è 5, quale però scrivesi appresso la lunetta, ed avanzando 3 nel 28, si scrive il 3 con la nota seguente 5 di esso, che fa 35, e questo deve dividersi per 10, che è il doppio della nota radicale 5, e comprendendosi esso 10 tre volte nel 35, perciò nella lunetta scrivesi in secondo luogo il 3, e congiunto il 3 al divisore 10, che fa 103, si moltiplica per 3, e diviene 309; il che levandosi dal 351 (aggiunta al 35 la seguente nota 1 del proposto numero), ne avanza 42, cui aggiunta la seguente nota 5 del numero dato, si ha 425, che diviso per il doppio delle due note radicali 53, cioè per 106, ci si ritrova compreso 4 volte, però alla lunetta si aggiunge il 4, ed ancora si aggiunge al 106, onde riesce 1064, che moltiplicandosi per 4 da 4256, il che è lo stesso col resto del proposto numero, aggiungendo al 425 l'ultima nota 6; però del dato numero 285156 la vera radice è 534 ritrovata con questo metodo.

546820

546820	739 (699 / 1478)
49	143 - 3
568	429
429	1469 - 9
13920	13221
13221	
699	

Ecco un altro esempio, in cui si troverà la radice prossima, e non precisa. Sia il numero dato 546820. Avendolo punteggiato, si cerchi il massimo quadrato nelle prime note 54, che sarà 49, la cui radice è 7, che si scriverà dentro la lunetta, e sottraendo 49 da 54 rimane l' avanzo 5, cui aggiunta la seguente nota 6, sarà 56, da dividersi pel doppio di 7, cioè per 14, il che vi entrerebbe 4 volte perappunto, ma perchè se alli 14 ci si aggiungesse il 4, verrebbe 144, il quale moltiplicato per 4 riuscirebbe 576, che non potrebbe sottrarsi dal 568 (aggiunta al 56 l' altra nota 8 del proposto numero) perciò si scriva solamente il 3 in vece di 4, come nella terza regola fù avvisato, onde nella lunetta si aggiungerà il 3, e questo pure aggiunto al 14, si averà 143, che moltiplicato per 3, ci darà 429, e questo sottratto da 568 ne rimarrà 139, cui aggiunta l' altra nota del proposto numero, che è 2 (dopo l' 8 al 56 aggiunto) sarà 1392, il che diviso col doppio di 73, cioè per 146, si vede, che ci entra 9 volte, onde si aggiunge 9 all' altre due note della lunetta; ed aggiunto ancora al medesimo divisore, riesce 1469, che moltiplicato per 9 di-

venta 13221, che dal 13920 (aggiunta l'ultima nota zero del proposto numero al 1392) sottraendosi, vi rimane per residuo 699, di cui si fa una frazione denominata dal doppio delle radici trovate 739, che sarà 1478; cioè tale frazione riuscirà $\frac{699}{1478}$ da aggiungersi alla suddetta radice 739; sarà però tale radice con quella frazione alquanto maggiore della vera, e se il denominatore di quella frazione si augumentasse d'una unità, facendo $\frac{699}{1479}$, riuscirebbe alquanto minore della radice vera (sebbene tale frazione potrebbe ridursi a $\frac{233}{493}$, dividendo per tre l'uno e l'altro numero, il superiore, e l'inferiore) onde la vera radice di 546820, che non si puo ritrovare espressa in note numerali, sarà di mezzo tra il 739 $\frac{699}{1478}$, e 739$\frac{699}{1479}$; o pure dicasi tra il 739 $\frac{233}{492}$, ed il 739 $\frac{233}{493}$, delle quali una è alquanto maggiore, l' altra alquanto minore della sua esatta radice, che precisamente non può esprimersi, per non essere quel numero un vero quadrato.

Anzi per accostarsi meglio in infinito (per quanto si voglia) alla radice precisa, si potrebbe continuare l'operazione, aggiungendo all' ultimo avanzo 699, due, o quattro, o sei zeri, o quanti si volesse di numero pari; e continuando l' operazione come sopra, si troverebbero altre, ed altre note da aggiungersi alla radice per numeratori di un altra frazione, che sarà decimale per il denomi-

mi-

minatore, in cui sarà l' unità con tanti zeri, quante fossero le note ultimamente ritrovate, o pure dicasi, quante erano le coppie delle cifre aggiunte all' ultimo avanzo.

Per esempio, aggiungendo al 699 quattro coppie di zeri, si fara 6990000000, e continuando l' operazione si troverebbe da aggiungere alla radice delle note già determinate 739 queste altre quattro note 4728 denominate da 10000, cioè la frazione $\frac{4728}{10000}$ per cagione delle quattro coppie di zeri aggiunti al detto avanzo, il che si vede potersi continuare similmente in infinito; e detta radice, benchè maggiore alquanto della radice 739, è però minore della già trovata di sopra $739\frac{699}{1478}$, e maggiore dell' altra $739\frac{699}{1479}$, onde più si accosta alla radice esatta del proposto numero. Anzi quella frazione $\frac{4728}{10000}$ potrebbe ridursi in minori termini, dividendosi per 8 il numeratore, ed il denominatore, onde essa frazione si esprimerebbe per $\frac{591}{1250}$, che è uguale alla precedente $\frac{4728}{10000}$; e però la radice alquanto maggiore della precisa, sarà $739\frac{591}{1250}$, e la radice alquanto minore sarebbe $739\frac{591}{1251}$, anzi $739\frac{197}{417}$ uguale all' altra, dividendosi per 3 tanto il numeratore, quanto il denominatore di essi.

Sarà bene poi osservare, come si comprenda la

ſerie di tutti i quadrati per mezzo de' numeri diſpari 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 &c. mentre 1 è il quadrato dell' unità, cui ſi aggiunga il 3 ne rieſce 4, che è quadrato di 2; ed aggiuntovi pure 5, ſi fa 9 quadrato di 3, e ſimilmente al 9 aggiunto il 7, ſi fa 16 quadrato di 4, e così proſeguendo, ſi fanno tutti i quadrati coll' aggiunta de' proſſimi diſpari, come può vederſi nella ſeguente Tavola, in cui ſono le Radici, ed i loro Quadrati, e le Differenze di eſſi, che ſono i numeri diſpari, che aggiunti al proſſimo quadrato, ne fanno il ſeguente di mano in mano.

Tavola de' Quadrati.

Radici.	*Quadrati.*	*Differenze.*	*Radici,*	*Quadrati,*	*Differenze.*
1	1	1	19	361	37
2	4	3	20	400	39
3	9	5	21	441	41
4	16	7	22	484	43
5	25	9	23	529	45
6	36	11	24	576	47
7	49	13	25	625	49
8	64	15	26	676	51
9	81	17	27	729	53
10	100	19	28	784	55
11	121	21	29	841	57
12	144	23	30	900	59
13	169	25	31	961	61
14	196	27	32	1024	63
15	225	29	33	1089	65
16	256	31	34	1156	67
17	289	33	35	1225	69
18	324	35	36	1296	71

Radici.	Quadrati.	Differenze.	Radici.	Quadrati.	Differenze.
37	1369	73	69	4761	137
38	1444	75	70	4900	139
39	1521	77	71	5041	141
40	1600	79	72	5184	143
41	1681	81	73	5329	145
42	1764	83	74	5476	147
43	1849	85	75	5625	149
44	1936	87	76	5776	151
45	2025	89	77	5929	153
46	2116	91	78	6084	155
47	2209	93	79	6241	157
48	2304	95	80	6400	159
49	2401	97	81	6561	161
50	2500	99	82	6724	163
51	2601	101	83	6889	165
52	2704	103	84	7056	167
53	2809	105	85	7225	169
54	2916	107	86	7396	171
55	3025	109	87	7569	173
56	3136	111	88	7744	175
57	3249	113	89	7921	177
58	3364	115	90	8100	179
59	3481	117	91	8281	181
60	3600	119	92	8464	183
61	3721	121	93	8649	185
62	3844	123	94	8836	187
63	3969	125	95	9025	189
64	4096	127	96	9216	191
65	4225	129	97	9409	193
66	4356	131	98	9604	195
67	4489	133	99	9801	197
68	4624	135	100	10000	199

&c.

E così pure gli altri potrebbero ſimilmente diſporſi, ma parmi ſia bene oſservare ancora, quali ſiano i quadrati de' numeri compoſti con qualche frazione, e quali ſiano le loro differenze, ſe ſi prendono le loro radici aritmeticamente creſcenti. Ne porterò quì alcune Tavole, che ſarà bene il vederle, delle quali niun altro Autore ne ha diſcorſo.

Tavola de' Quadrati de' numeri, con alcune frazioni aggiunte.

Radici.	Quadrati.	Differenze.	Radici.	Quadrati.	Differenze.
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	4	$7\frac{1}{2}$	$56\frac{1}{4}$	16
$2\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$	6	$8\frac{1}{2}$	$72\frac{1}{4}$	18
$3\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	8	$9\frac{1}{2}$	$90\frac{1}{4}$	20
$4\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{4}$	10	$10\frac{1}{2}$	$110\frac{1}{4}$	22
$5\frac{1}{2}$	$30\frac{1}{4}$	12	$11\frac{1}{2}$	$132\frac{1}{4}$	24
$6\frac{1}{2}$	$42\frac{1}{4}$	14	$12\frac{1}{2}$	$156\frac{1}{4}$	
			&c.	&c.	&c.

Ra-

Radici.	Quadrati.	Differenze.
$1\frac{1}{3}$	$1\frac{7}{9}$	$3\frac{2}{3}$
$2\frac{1}{3}$	$5\frac{4}{9}$	$5\frac{2}{3}$
$3\frac{1}{3}$	$11\frac{1}{9}$	$7\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{3}$	$18\frac{7}{9}$	$9\frac{2}{3}$
$5\frac{1}{3}$	$28\frac{4}{9}$	$11\frac{2}{3}$
$6\frac{1}{3}$	$40\frac{1}{9}$	$13\frac{2}{3}$
$7\frac{1}{3}$	$53\frac{7}{9}$	$15\frac{2}{3}$
$8\frac{1}{3}$	$69\frac{4}{9}$	$17\frac{2}{3}$
$9\frac{1}{3}$	$87\frac{1}{9}$	$19\frac{2}{3}$
$10\frac{1}{3}$	$106\frac{7}{9}$	$21\frac{2}{3}$
$11\frac{1}{3}$	$128\frac{4}{9}$	$23\frac{2}{3}$
$12\frac{1}{3}$	$152\frac{1}{9}$	
&c.	&c.	&c.

Radici.	Quadrati.	Differenze.
$1\frac{1}{4}$	$1\frac{9}{16}$	$3\frac{1}{2}$
$2\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{16}$	$5\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{4}$	$10\frac{9}{16}$	$7\frac{1}{2}$
$4\frac{1}{4}$	$18\frac{1}{16}$	$9\frac{1}{2}$
$5\frac{1}{4}$	$27\frac{9}{16}$	$11\frac{1}{2}$
$6\frac{1}{4}$	$39\frac{1}{16}$	$13\frac{1}{2}$
$7\frac{1}{4}$	$52\frac{9}{16}$	$15\frac{1}{2}$
$8\frac{1}{4}$	$68\frac{1}{16}$	$17\frac{1}{2}$
$9\frac{1}{4}$	$85\frac{9}{16}$	$19\frac{1}{2}$
$10\frac{1}{4}$	$105\frac{1}{16}$	$21\frac{1}{2}$
$11\frac{1}{4}$	$126\frac{9}{16}$	$23\frac{1}{2}$
$12\frac{1}{4}$	$150\frac{1}{16}$	
&c.	&c.	&c.

Radici.	Quadrati.	Differenze.
$1\frac{1}{5}$	$1\frac{11}{25}$	$3\frac{2}{5}$
$2\frac{1}{5}$	$4\frac{21}{25}$	$5\frac{2}{5}$
$3\frac{1}{5}$	$10\frac{6}{25}$	$7\frac{2}{5}$
$4\frac{1}{5}$	$17\frac{16}{25}$	$9\frac{2}{5}$
$5\frac{1}{5}$	$27\frac{1}{25}$	$11\frac{2}{5}$
$6\frac{1}{5}$	$38\frac{11}{25}$	$13\frac{2}{5}$

Radici.	Quadrati.	Differenze.
$7\frac{1}{5}$	$51\frac{21}{25}$	$15\frac{2}{5}$
$8\frac{1}{5}$	$67\frac{6}{25}$	$17\frac{2}{5}$
$9\frac{1}{5}$	$84\frac{16}{25}$	$19\frac{2}{5}$
$10\frac{1}{5}$	$104\frac{1}{25}$	$21\frac{2}{5}$
$11\frac{1}{5}$	$125\frac{11}{25}$	$23\frac{2}{5}$
$12\frac{1}{5}$	$148\frac{21}{25}$	
&c.	&c.	&c.

Ra-

Radici.	Quadrati,	Differenze.	Radici,	Quadrati.	Differenze.
$1 \frac{1}{6}$	$1 \frac{13}{36}$	$3 \frac{1}{3}$	$7 \frac{1}{6}$	$51 \frac{13}{36}$	$15 \frac{1}{3}$
$2 \frac{1}{6}$	$4 \frac{25}{36}$	$5 \frac{1}{3}$	$8 \frac{1}{6}$	$66 \frac{25}{36}$	$17 \frac{1}{3}$
$3 \frac{1}{6}$	$10 \frac{1}{36}$	$7 \frac{1}{3}$	$9 \frac{1}{6}$	$84 \frac{1}{36}$	$19 \frac{1}{3}$
$4 \frac{1}{6}$	$17 \frac{13}{36}$	$9 \frac{1}{3}$	$10 \frac{1}{6}$	$103 \frac{13}{36}$	$21 \frac{1}{3}$
$5 \frac{1}{6}$	$26 \frac{25}{36}$	$11 \frac{1}{3}$	$11 \frac{1}{6}$	$124 \frac{25}{36}$	$23 \frac{1}{3}$
$6 \frac{1}{6}$	$38 \frac{1}{36}$	$13 \frac{1}{3}$	$12 \frac{1}{6}$	$148 \frac{1}{36}$	
			&c.	&c.	&c.

E così facilmente si potranno fare gli altri quadrati, le cui radici numeriche siano composte di altre frazioni, e le cui differenze possano competerci. In quest' ultima tavola, la radice $2 \frac{1}{6}$, facendosi del quadrato $4 \frac{25}{36}$, mostra che tale suo quadrato è uguale al quadrato di 2 (che è 4) ed al quadrato della frazione $\frac{5}{6}$ (il cui quadrato è pure $\frac{25}{36}$) il che ho gusto si osservi.

CAPITOLO X.

Del cavare la Radice cubica di un numero.

MOltiplicandosi qualunque quadrato per la sua radice quadra, ne riesce il *Cubo*, di cui quella stessa radice dirassi *Cubica*; però si cerca, come possa trovarsi la cubica radice di qualsivoglia numero proposto, il quale se non è propriamente cubo, non potrà avere una esatta radice cubica; ma solamente qualcheduna alquanto prossima, con una frazione aggiuntavi. Conviene però os-

osservare i cubi delle prime note numeriche nella seguente Tavola, in cui sono posti ancora i loro quadrati.

Radici.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrati.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubi.	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Nel dato numero da cavarsi la radice cubica si punteggia l' ultima nota, e procedendo avanti verso la sinistra, si lasciano due note libere, e l' altra si punteggia, indi se vi sono altre due note, si lasciano libere, e l' altra punteggiasi, e così sempre. Per esempio sia proposto il numero 82312875. Si punteggia l' ultima nota 5, e passate l'altre due precedenti 7, e 8, si fa il punto sotto il 2, e passate l' altre due note 1 e 3, si punteggia la seguente nota, che pure è un 2, come si vede nella seguente dimostrazione.

Quì la lettera *R* significa la Radice.

La lettera *Q* il Quadrato.

La lettera *C* il Cubo.

Il segno X tra due numeri, importa la moltiplicazione di uno nell' altro.

Il segno = mostra l' ugualità de prodotti di quei numeri nell' altro.

Il segno + importa la somma.

82312875

82312875	(435
64	
183	R. 4
144	Q 16
3912	C. 64
1107	
28058	4X4=16X3=48
27735	
32375	3X3=9X3=27X4=1080+27=1107
32375	
00000	43X43=1849X3=5547

5X5=25X3=75X43=32250+125=32375

Indi si considerino le prime note al punto verso sinistra, cioè 82, e si cerchi il massimo cubo ivi compreso, che sarebbe 64, onde la sua radice cubica 4 si scriva dopo la lunetta, e sottratto il 64 da 82, vi rimane 18, a cui aggiunta la seguente nota 3 del numero proposto, ne risulta 183, cui deve compararsi il triplo del quadrato di quella radice 4, il cui quadrato essendo 16, triplicato si fa 48, e si considera quante volte questo si contenga in quello 183, e trovandosi, che ci stia tre volte, che sarebbe 144, però nella lunula scrivasi la stessa nota 3 appresso l'altra 4, indi preso l'eccesso di 183 sopra il 144, che è 39, vi si aggiungano l'altre due note 12 del proposto numero, onde riuscirà 3912. Quindi preso il quadrato della seconda radicale nota 3, che è 9 si triplichi, che diven-

venterà 27, e ciò si moltiplichi per l'antecedente nota radicale 4, che si farà 108, e gli si aggiunga uno zero, sicchè diventi 1080, indi preso il cubo di quella nota 3, che pure è 27, sommato questo con quello, diventa 1107; e ciò si sottragga dal numero superiore 3912, e ci resta 2805, cui poscia aggiungasi la nota 8 del proposto numero, che diventerà 28058 (se però fosse riuscito maggiore quel numero 1107 dell'altro 3912, onde non si fosse potuto sottrarre quello da questo, come si vedrà in un altro esempio, si sarebbe dovuta diminuire la seconda nota radicale, computando in quel primo eccesso il triplo del quadrato della prima nota radicale, come ci si contenesse meno volte). Quindi quadrando il numero delle due note radicali 43, che sarà 1849, e triplicandolo, che riuscirà 5547, partasi da questo quel numero 28058, e si vedrà entrarci cinque volte, perchè moltiplicato quello per 5 diventa 27735, perciò segnasi la nota 5 nella lunula al terzo luogo; e sottratto 27735 da 28058, ne rimane 323, cui si aggiungano l'altre due note 75 del proposto numero, e diventerà l'avanzo 32375, indi preso il quadrato di quella terza nota 5, che è il 25, e triplicatolo, si fa 75, e moltiplicato per le altre antecedenti note radicali 43, diventa 3225, a cui si aggiunga un zero, e sarà 32250; e preso poi il cubo della medesima nota 5, che è 125, si faccia insieme la somma di questo, e di quello, e diventerà quindi 32375; il che essendo uguale a quell'ultimo suo avanzo, è manifesto essere 435 la precisa Radice cubica del proposto numero 82312875.

Ma

Ma se questo avanzo fosse ritrovato minore di quella somma, si dovrebbe diminuire la nota ultimamente trovata (come si è detto di sopra) se poi fosse maggiore il suo eccesso, si farebbe numeratore di una frazione denominata da un numero triplo della somma della trovata radice, e del suo quadrato, la quale frazione insieme con essa radice sarebbe prossimamente maggiore, o minore della vera; e quando il proposto numero si accrescesse con triplicati zeri, gli si aggiungerebbe un altra frazione, col denominatore della radice cubica di que' millesimi aggiunti, come al di sotto potrà darsene l'esempio.

```
52658          ( 37 2005/4218
27
256
189            3X3=9X3=27
 6758
 4753          7X7=49X3=147X3=4410+343=4753
 2005
               37X3=111
               37X37=1369X3=4107
               111+4107=4218
```

Essendosi però dato il numero 52658, di cui si cerchi la radice cubica, punteggiatolo nelle note 8, e 2, si cercherà il massimo cubo nelle prime note 52, che si vedrà essere il 27, la cui radice cubica è il 3, la quale scrivasi dopo la lunetta;

ta; e sottratto il 27 da 52, rimane 25, cui aggiunta la prossima nota 6, ne riesce 256, in cui osservando, quante volte ci entri il triplo di 9 quadrato di 3, che sarà pure 27, si trova, che ci entrerebbe 9 volte, facendo 243; ma questo è troppo, perchè fatto l'altro calcolo, sarebbe il seguente eccesso minore di esso; ed ancora entrandovi 8 volte nel 256 sarebbe ancora troppo; però si pigli 7 volte, che fa 189, il che da 256 levato, ne rimane 67, cui si aggiungano l'altre due note, e diventerà 6758; indi posta essa nota 7 nella lunetta, il suo quadrato 49 si triplichi, e sarà 147, e moltiplicato per la prima nota radicale 3, riesce 441, cui aggiunto uno zero si fa 4410, ed aggiuntovi il cubo di 7, che è 343, si ha 4753, e questo sottratto da quell' avanzo 6758, ne rimane 2005, il che si ponga appresso le radici cubiche 37 per numeratore della frazione, cui sottopongasi per denominatore il triplo della radice trovata, e del suo quadrato; onde essendo il triplo di 37 questo numero 111, ed il di lui quadrato 1369, triplicato diviene 4107, l'uno e l'altro farà 4218, che sarà il denominatore della frazione; sicchè la prossima radice (ma però alquanto minore della vera rispetto al proposto numero 52658, sarà $37 \frac{2005}{4218}$; il che dovea determinarsi.

Più esattamente però si troverebbe la frazione da aggiungersi alla radice ritrovata, se al numero dato si aggiungessero alquanti tripli di zero, e seguitando il calcolo si troverebbero altre note radicali, che prese per numeratore, gli si sottoporrebbe per denominatore l'unità, con la terza

parte degli zeri, che si erano aggiunti al proposto numero. Come per esempio essendovi il numero 29160, aggiuntivi due ternarj di zero, si troverà la radice di tutto quel numero 3077, e perchè sempre sono tante note radicali, quanti sono li punti addottivi, essendo però solamente due al primo numero proposto, si pigliano le prime due note radicali 30, e l'altre due seguenti, per gli zeri aggiunti, lascians per numeratore 77 della frazione, che averà poi per denominatore l'unità, con due zeri aggiuntivi; sicchè la più prossima radice cubica di 29160 sarà $30\frac{77}{100}$ alquanto però minore della sua precisa; ed accrescendo di una unità esso numeratore, cioè facendo $30\frac{78}{100}$ riuscirebbe prossimamente maggiore della sua esatta radice cubica, la quale non si può mai esprimere precisamente con le note numeriche, ma secondo che si aggiungano al dato numero più tripli di zero, si farà la radice sempre più prossima alla sua precisa.

29160000000
29160 (3077
$30\frac{77}{100}$

Bisogna finalmente osservare, come la serie de' Cubi si comprenda pure da' numeri dispari, ma con la somma di tanti, quante sono le unità di sua radice cubica, cioè in questa maniera; il primo cubo di 1 è pure 1, il cubo secondo, la cui radice è 2, si comprende dalli due susseguenti numeri dispari 3 e 5, che fanno il cubo 8, il terzo cubo della radice 3 si compone pure dalli tre seguenti dispari, che sono 7, 9, ed 11, li quali fanno il cubo 27, e così altri quattro dispari 13, 15, 17,

e 19

e 19 fanno il quarto cubo 64, la cui radice è 4, e così susseguentemente, come può vedersi in questa Tavola di poche radici e cubi addotta, ma che si potrebbe in oltre continuare nella stessa maniera.

Radici.	*Cubi.*	*Dispari, uguali al Cubo.*
1	1	1
2	8	3 5
3	27	7 9 11
4	64	13 15 17 19
5	125	21 23 25 27 29
6	216	31 33 35 37 39 41
7	343	43 45 47 49 51 53 55
&c.	&c.	&c.

Ne aggiungerò un altra alquanto maggiore, in cui si vede, oltre le radici ed i cubi, le loro due differenze, delle quali l'ultima è composta di numeri aritmetici, la cui differenza è sempre il sei; onde è fatta di 6, 12, 18, 24, 30 &c.

Radici.	*Cubi.*	*Differenza 1.*	*Differenza 2.*
0	0		
		1	
1	1		6
		7	
2	8		12
		19	
3	27		18
		37	
4	64		24
		61	
5	125		30

Radici.	*Cubi.*	*Differenza 1.*	*Differenza 2.*
		91	
6	216	127	36
7	343	169	42
8	512	217	48
9	729	271	54
10	1000	331	60
11	1331	397	66
12	1728	469	72
13	2197	547	78
14	2744	631	84
15	3375	721	90
16	4096	817	96
17	4913	919	102
18	5832	1027	108
19	6859	1141	114
20	8000	1261	120
21	9261	1387	126
22	10648	1519	132
23	12167	1657	138

Radici.	Cubi.	Differenza 1.	Differenza 2.
24	13824	1801	144
25	15625	1951	150
26	17576	2107	156
27	19683	2269	162
28	21952	2437	168
29	24389	2611	174
30	27000	2791	180
31	29791	2977	186
32	32768	3169	192
33	35937	3367	198
34	39304	3571	204
35	42875	3781	210
36	46656	3997	216
37	50653	4219	222
38	54872	4447	228
39	59319	4681	234
40	64000	4921	240
41	68921	5167	246

Radici.	*Cubi.*	*Differenza 1.*	*Differenza 2.*
42	74088	5419	252
43	79507	5677	258
44	85184	5941	264
45	91125	6211	270
46	97336	6487	276
47	103823	6769	282
48	110592	7057	288
49	117649	7351	294
50	125000	7651	300
51	132651	7957	306
52	140608	8269	312
53	148877	8587	318
54	157464	8911	324
55	166375	9241	330
56	175616	9577	336
57	185193	9919	342
58	195112	10267	348
59	205379	10621	354

Radici.	*Cubi.*	*Differenza 1.*	*Differenza 2.*
60	216000	10981	360
61	226981	11347	366
62	238328	11719	372
63	250047	12097	378
64	262144	12481	384
65	274625	12871	390
66	287496	13267	396
67	300763	13669	402
68	314432	14077	408
69	328509	14491	414
70	343000	14911	420
71	357911	15337	426
72	373248	15769	432
73	389017	16207	438
74	405224	16551	444
75	421875	17101	450
76	438976	17557	456
77	456533	18019	462

Radici.	Quadrati.	Differenza 1.	Differenza 2.
78	474552	18487	468
79	493039	18961	474
80	512000	19441	480
81	531441	19927	486
82	551368	20419	492
83	571787	20917	498
84	592704	21421	504
85	614125	21931	510
86	636056	22447	516
87	658503	22969	522
88	681472	23497	528
89	704969	24031	534
90	729000	24571	540
91	753571	25117	546
92	778688	25669	552
93	804357	26227	558
94	830584	26791	564
95	857375	27361	5[illegible]

Radici.	*Quadrati.*	*Differenza 1.*	*Differenza 2.*
96	884736		576
		27937	
97	912673		582
		28519	
98	941192		588
		29107	
99	970299		594
		29701	
100	1000000		600
&c.	&c.	&c.	&c.

Ancora le radici ſi pigliano aritmeticamente, ma congiuntavi una ſteſſa frazione, i Cubi di eſſe parimente hanno le due differenze, di cui le ſeconde parimente tra loro differiſcono dello ſteſſo numero 6, come ſi vedrà nelle ſeguenti brevi Tavole.

Radici.	Cubi.	Differenze prime.	Differenze seconde.	Differenze ultime.
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{8}$			
		$12\frac{1}{4}$		
$2\frac{1}{2}$	$15\frac{5}{8}$		15	
		$27\frac{1}{4}$		6
$3\frac{1}{2}$	$42\frac{7}{8}$		21	
		$48\frac{1}{4}$		6
$4\frac{1}{2}$	$91\frac{1}{8}$		27	
		$75\frac{1}{4}$		6
$5\frac{1}{2}$	$166\frac{3}{8}$		33	
		$108\frac{1}{4}$		6
$6\frac{1}{2}$	$274\frac{5}{8}$		39	
		$147\frac{1}{4}$		6
$7\frac{1}{2}$	$421\frac{7}{8}$		45	
		$192\frac{1}{4}$		6
$8\frac{1}{2}$	$614\frac{1}{8}$		51	
		$243\frac{1}{4}$		6
$9\frac{1}{2}$	$857\frac{3}{8}$		57	
		$300\frac{1}{4}$		
$10\frac{1}{2}$	$1157\frac{5}{8}$			
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Ra-

Radici.	*Cubi.*	*Differenze prime.*	*Differenze seconde.*	*Differenze ultime.*
1 $\frac{1}{3}$	2 $\frac{10}{27}$	10 $\frac{1}{3}$	14	6
2 $\frac{1}{3}$	12 $\frac{19}{27}$	24 $\frac{1}{3}$	20	6
3 $\frac{1}{3}$	37 $\frac{1}{27}$	44 $\frac{1}{3}$	26	6
4 $\frac{1}{3}$	81 $\frac{10}{27}$	70 $\frac{1}{3}$	32	6
5 $\frac{1}{3}$	151 $\frac{19}{27}$	102 $\frac{1}{3}$	38	6
6 $\frac{1}{3}$	254 $\frac{1}{27}$	140 $\frac{1}{3}$	44	6
7 $\frac{1}{3}$	394 $\frac{10}{27}$	184 $\frac{1}{3}$	50	6
8 $\frac{1}{3}$	578 $\frac{19}{27}$	234 $\frac{1}{3}$	56	6
9 $\frac{1}{3}$	813 $\frac{1}{27}$	290 $\frac{1}{3}$		
10 $\frac{1}{3}$	1103 $\frac{10}{27}$			
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Ra-

Radici.	Cubi.	Differenze prime.	Differenze seconde.	Differenze ultime.
$1\frac{2}{3}$	$4\frac{17}{27}$	$14\frac{1}{3}$	16	6
$2\frac{2}{3}$	$18\frac{26}{27}$	$30\frac{1}{3}$	22	6
$3\frac{2}{3}$	$49\frac{8}{27}$	$52\frac{1}{3}$	28	6
$4\frac{2}{3}$	$101\frac{17}{27}$	$80\frac{1}{3}$	34	6
$5\frac{2}{3}$	$181\frac{26}{27}$	$114\frac{1}{3}$	40	6
$6\frac{2}{3}$	$296\frac{8}{27}$	$154\frac{1}{3}$	46	6
$7\frac{2}{3}$	$450\frac{17}{27}$	$200\frac{1}{3}$	52	6
$8\frac{2}{3}$	$650\frac{26}{27}$	$252\frac{1}{3}$	58	
$9\frac{2}{3}$	$903\frac{8}{27}$	$310\frac{1}{3}$		
$10\frac{2}{3}$	$1213\frac{17}{27}$			
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

CA-

CAPITOLO XI.

De' numeri rotti, che ſono le Frazioni.

AVendo diſcorſo di ſopra delle Frazioni, che talvolta ſi aggiungono al quoziente della diviſione, e alle radici quadrate, o cubiche di un numero non eſattamente quadrato ne cubico, ed ancora a' quadrati, ed a' cubi eſattamente fatti da tali radici compoſte di numero intiero e di un rotto, ed ancora le loro differenze talvolta ſi veggono avere aggiunte delle frazioni. Ora biſogna per maggior chiarezza vedere più particolarmente, che coſa ſiano tali frazioni o numeri rotti, e come ſi maneggino nel calcolarli, perchè ſovente accade di doverli ſommare, o ſottrarre, o moltiplicare, o dividere; dal che potrà oſſervarſi, come ſiano fatte le già eſpreſſe nelle Tavole precedenti.

La frazione eſſendo compoſta di due numeri intercetti tra una retta linea traſverſale, per cui ſeparaſi il ſuperiore (che diceſi *Numeratore*) dall' inferiore (che è detto *Denominatore*) deve ſempre avere quell' inferior numero maggiore dell' altro, che è al di ſopra; imperocchè quello denomina alquante parti delle unità, da queſt' altro enumerate, e non può farſi un numero intero con tali frazioni; però ſe il denominatore foſſe uguale al numeratore, per eſempio $\frac{3}{3}$, o $\frac{7}{7}$, o $\frac{15}{15}$ ſignificherebbero una ſemplice unità, che tanto ſono tre terzi, quanto ſette ſetteſimi, o quindici quindiceſimi, e ſe foſſe minore il denominatore

del ſuo numeratore, importerebbe qualche numero, come ſe fuſſe duplo, o triplo, o quadruplo &c. quello di queſto, ne importerebbe il 2, o pure il 3, o il 4, per eſempio $\frac{14}{7}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{12}{3}$ &c. eſpongono quello il due, l'altro il tre, e l'ultimo il quattro, e così gli altri: ma ſe non foſſe il numeratore ugualmente molteplice del denominatore, di cui però ſia maggiore, converrà rimettere tale frazione ad un numero, con un altra frazione particolare; per eſempio $\frac{23}{5}$ è uguale a 4 e $\frac{3}{5}$, perchè il 5 entra 4 volte nel 20, e ne avanza il 3; ſimilmente $\frac{243}{34}$ è uguale a 7 $\frac{5}{34}$, perchè 34 via 7 fa 238, e ne avanza 5 per giungere al 243.

Se il numeratore, ed il denominatore foſſero diviſibili pel medeſimo numero, potrebbe la frazione ridurſi in numeri minori; per eſempio $\frac{423}{912}$, in cui può dividerſi per 3 tanto il ſuperiore, che ridurrebbeſi in 141, quanto l'inferiore, che riduceſi in 304, ſi doverà ridurre a queſt' altra frazione $\frac{141}{304}$; così pure la frazione $\frac{644}{1012}$ potendoſi dividere per 4 ambidue li ſuoi numeri, dovrà ridurſi a $\frac{161}{253}$, anzi però queſto numeratore 161, dividendoſi per 23 in 7, ed il denominatore 253 altresì dividendoſi per 23 in 11, potrà farſi più piccola eſſa frazione, in $\frac{7}{11}$, che è la ſteſſa con la prima $\frac{644}{1012}$, eſſendo così diviſo l' uno e l'altro numero per 92.

Alle volte però conviene ridurre alcune diverſe frazioni di denominatore diverſo, ed altre loro uguali denominate da uno ſteſſo numero, per eſempio; ſiano eſpoſte le frazioni $\frac{3}{5}$, e $\frac{4}{7}$, ſi moltiplichi alternatamente il numeratore dell'una col denominatore dell' altra, cioè 3 via 7 fa 21, e

4 via 5

4 via 5 fa 20, e questi prodotti diventino li numeratori di due altre frazioni, il di cui denominatore sia poi il prodotto di ambi li primi denominatori, cioè 5 via 7, che fa 35, però le due proposte frazioni si saranno ridotte a queste due altre $\frac{21}{35}$, e $\frac{20}{35}$, equivalenti alle prime due, con quest' altro medesimo denominatore di ciascheduna 35; essendo i numeri della prima $\frac{3}{5}$ moltiplicati per 7, onde riesce $\frac{21}{35}$, ed i numeratori della seconda $\frac{4}{7}$ moltiplicati per 5, onde riesce $\frac{20}{35}$.

Occorrendo poi sommare insieme più frazioni ridotte come sopra ad un medesimo denominatore, basta sommare i loro numeratori, ed in uno ridurli; così per sommare $\frac{3}{5}$ con $\frac{4}{7}$, primieramente riduconsi alle altre due loro uguali $\frac{21}{35}$, e $\frac{20}{35}$, poi si sommano insieme i loro numeratori 21, e 20, che fanno 41, onde ne riesce la somma di ambidue uguale a $\frac{41}{35}$, che però riuscendo il numeratore maggiore del denominatore, si sottragga 35 da 41, che entrandovi una volta sola, con l' avanzo di 6, sarà la somma di quelle due frazioni uguale ad 1 $\frac{6}{35}$, cioè uguale ad una unità, e sei parti trigesimequinte.

Ma volendo sottrarre una frazione dall' altra, come il $\frac{4}{7}$ da $\frac{3}{5}$, ridotte alla stessa denominazione $\frac{20}{35}$, e $\frac{21}{35}$, si vede, che sottraendo il numeratore di quella dal numeratore di questa, ne rimane per residuo $\frac{1}{35}$, onde si ha che $\frac{1}{35}$ con $\frac{20}{35}$ essendo uguale a $\frac{21}{35}$, perciò l' $\frac{1}{35}$ con $\frac{4}{7}$, è a $\frac{3}{5}$ uguale.

Se poi ci occorre moltiplicare una frazione con qualche numero intero, o con un altra frazione, basta nel primo caso moltiplicare il numeratore con l' altro numero, e ritenere la stes-

sa

ſa denominazione; per eſempio, volendo moltiplicare $\frac{3}{7}$ per 2 ne riuſcirà queſt' altra frazione $\frac{6}{7}$; ma volendo quella prima moltiplicare per 5, ne riuſcirebbe 5 via 3 uguale a 15, cioè $\frac{15}{7}$, ove riuſcendo maggiore il numeratore del denominatore, ſi può ridurre a $2\frac{1}{7}$, perchè il 7 è la metà di 14, onde nel 15 vi entra due volte, con l'unità di più; che ſe ſi voleſſe moltiplicare $\frac{3}{4}$ per il numero 8, diventerebbe $\frac{24}{4}$, il che può ridurſi all' intero numero 6, perchè ſei volte entra il 4 nel 24. Ma pure ſe ſi vorrà moltiplicare una frazione in un altra, per eſempio $\frac{3}{4}$ in $\frac{7}{11}$, ſi deve moltiplicare inſieme, non ſolo i numeratori, ma ancora i denominatori, con che ſi fa un altra frazione, perchè 3 via 7 fa 21, e 4 via 11 fa 44, onde moltiplicati $\frac{3}{4}$ in $\frac{7}{11}$, rieſce $\frac{21}{44}$; e ſimilmente, moltiplicando inſieme $\frac{5}{6}$ e $\frac{13}{30}$, ne rieſce $\frac{65}{180}$, i quali numeri potendoſi dividere ambidue per 5, ne rieſce il prodotto $\frac{13}{36}$.

Alle volte ſi potrà fare la diviſione di una frazione per un numero aſſoluto, o per un altra frazione; quanto alla prima operazione, baſta moltiplicare il denominatore per quel numero dato; per eſempio, ſi voglia dividere $\frac{3}{5}$ per 8; ſi moltiplichi per 8 il denominatore 5, che diventerà 40, e la frazione $\frac{3}{40}$ ſarà il quoziente di tale diviſione. Se però il numeratore della frazione dividenda ſi poteſſe intieramente dividere pel numero dato, baſterebbe dividerne il numeratore, e laſciare il denominatore come prima. Per eſempio, volendo dividere la frazione $\frac{6}{13}$ per 2, baſta dividere il 6 per 2, che rieſce 3, onde il quoziente ſarà $\frac{3}{13}$; ma volendo dividere una fra-

zio-

zione per un altra, come ſarebbe $\frac{3}{5}$ per $\frac{7}{11}$, ſi moltiplichi il numeratore del primo col denominatore del ſecondo, cioè 3 via 11, che farà 33, e queſto ſi ponga per numeratore del quoziente, indi moltiplicato il numeratore del ſecondo col denominatore del primo, cioè 7 via 5, che fa 35, ſi ponga queſto per denominatore del quoziente, che ſarà $\frac{33}{35}$, e così ſarà fatta la diviſione della prima frazione per la ſeconda. Si potrebbero ancora rivoltare i numeri della frazione dividente, e così ripoſta moltiplicarla con l' altra; per eſempio, volendo dividere $\frac{3}{5}$ per $\frac{7}{11}$, ſi rimetta di ſopra l' 11, e di ſotto il 7, riuſcendo $\frac{11}{7}$, il che moltiplicato per l' altra frazione $\frac{3}{5}$, riuſcirà $\frac{33}{35}$, come diviſione di $\frac{3}{5}$ per $\frac{7}{11}$.

Si oſſervi, che la moltiplicazione de' numeri interi rende il prodotto maggiore, e la diviſione dell' uno per l' altro rende il quoziente minore, ma al contrario la moltiplicazione delle frazioni rende il prodotto minore, e la loro diviſione fa il quoziente maggiore, mentre ſi è veduto, che moltiplicando $\frac{3}{4}$ in $\frac{7}{11}$ rieſce $\frac{21}{44}$, il che è minore tanto dell' uno, quanto dell' altro, perchè $\frac{3}{4}$ è uguale a $\frac{33}{44}$, e $\frac{7}{11}$ uguaglia il $\frac{28}{44}$, di ciaſcuno de' quali è minore il $\frac{21}{44}$; ma dividendo $\frac{3}{5}$ per $\frac{7}{11}$, ne rieſce il quoziente $\frac{33}{35}$, che è maggiore di ciaſcuna di tali frazioni, che ſi potrebbero ridurre col medeſimo denominatore, cioè $\frac{3}{5}$ uguale a $\frac{21}{35}$, e $\frac{7}{11}$ a $\frac{21}{33}$, o pure a $\frac{22}{35}$ con $\frac{1}{385}$: onde di ciaſcuno di eſſi è maggiore il quoziente $\frac{33}{35}$: e ſe viceverſa ſi foſſe diviſo il $\frac{7}{11}$ per $\frac{3}{5}$, ſarebbe riuſcito per quoziente a roverſcio il $\frac{35}{33}$, che è maggiore dell' unità, cioè uguale ad 1 $\frac{2}{33}$; ſiccome ancora dividen-

do $\frac{3}{4}$ per $\frac{1}{8}$, ſi farebbe $\frac{24}{4}$, che è un intero uguale a 6.

La ragione sì è, perchè eſſendo i numeri interi compoſti di unità, e le ſemplici frazioni minori di eſſa, come che il prodotto della moltiplicazione deve contenere tante volte uno de' numeri moltiplicati, quante volte l' altro contiene l' unità, perciò ne' numeri interi rieſce il prodotto maggiore, come moltiplicati inſieme il 3 e il 7, fanno 21, che tante volte contiene il 7, quante volte il 3 contiene l' unità; ma nelle frazioni $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{11}$, ſe il prodotto $\frac{21}{55}$ deve contenere tante volte una di eſſe $\frac{3}{5}$ quante volte l' altra $\frac{7}{11}$ contiene l' unità, mentre queſta è minore dell' unità, così pure eſſo prodotto $\frac{21}{55}$ deve meno contenere eſſa frazione moltiplicata $\frac{3}{5}$, e così pure eſſere minore dell' altra $\frac{7}{11}$, perchè ancora $\frac{3}{5}$ è minore dell' unità. Viceverſa nella diviſione, il quoziente deve contenerſi tante volte nel dividendo, quante volte ſi contiene l' unità nel diviſore, e però ne' numeri interi, ſiccome l' unità è minore del diviſore (non potendoſi dividere coſa alcuna per l' unità, ma per il numero maggiore di eſſa) così il quoziente è minore del dividendo; per eſempio, il 21 diviſo per 7 fa il quoziente 3, che tanto ſi contiene in 21, quanto ſi contiene l' unità in 7, ed è altrettanto minore il 3 di 21, come l' unità è minore di 7, ma nelle frazioni, deve il quoziente eſſere maggiore della frazione da dividerſi, come pure l' unità è maggiore dell' altra frazione dividente; così diviſo $\frac{4}{7}$ per $\frac{3}{5}$, ne rieſce $\frac{20}{21}$, che tanto è maggiore di $\frac{4}{7}$ (cioè di $\frac{12}{21}$, che è lo ſteſſo, mol-

tipli-

tiplicati per 3 ambi i numeri ſuperiore ed inferiore) come il 5 è maggiore di 3 (eſſendo 5 a 3, come 20 a 12), cioè come l' unità (uguale a $\frac{5}{5}$) è maggiore di $\frac{3}{5}$.

Circa il cavare la radice quadra o cubica da una frazione, ſe il numeratore ed il denominatore ſono quadrati, le loro radici quadre ne fanno la ricercata quadra radice, come ſe ſi vuole la radice quadra di $\frac{9}{25}$, ſi trova eſſere $\frac{3}{5}$, perchè ciò moltiplicato in ſe ſteſſo fa il $\frac{9}{25}$, e ſe tanto il numeratore quanto il denominatore foſſero cubi, la radice cubica di tale frazione ſi eſpone con le radici cubiche del ſuperiore e dell' inferiore; per eſempio, eſſendo la frazione $\frac{27}{343}$, la ſua radice cubica ſarà $\frac{3}{7}$, eſſendo il 3 radice cuba di 27, ed il 7 radice cuba di 343. Se poi foſſe il quadrato, o il cubo ſolamente in uno di que' numeri della frazione, cioè nel numeratore o nel denominatore, come ſarebbe $\frac{9}{23}$, ò $\frac{17}{100}$, o pure $\frac{27}{74}$, ò $\frac{43}{216}$, non ſi potrebbe farne l' eſatta radice, ma in quelle due prime ſi eſporrebbe la radice quadra in queſta maniera $\frac{3}{\sqrt{23}}$ e $\frac{\sqrt{17}}{10}$; e nelle altre due la radice cubica ſarebbe $\frac{3}{\sqrt[3]{74}}$, e $\frac{\sqrt[3]{43}}{6}$, ponendo la vera radice di que' numeri quadrati o cubi, ed eſponendo la radice quadra del numero non quadrato col ſegno $\sqrt{..}$, e la radice cuba di quello che non è cubico, col ſegno $\sqrt[3]{..}$; ſe poi neſſuno di quei numeri foſſe quadrato, come $\frac{3}{7}$, la ſua quadra radice ſi eſprimerà col ſegno d' ambidue $\sqrt{\frac{3}{7}}$, e non eſſendo pure nella frazione ve-

run numero cubico, la ſua radice cubica ſi eſporrà parimente con l'altro ſegno $\sqrt[3]{\frac{3}{7}}$; ſe pure non foſſe di maggiori numeri, di cui trovandoſi la radice proſſima almeno alla ſua eſatta, con eſſe ſi farebbe la frazione radicale; per eſempio, di queſta frazione $\frac{13925}{30277}$ ſarà proſſima la radice quadra $\frac{118}{174}$ (eſſendo 118 proſſima radice di 13925, alquanto minore, perchè il ſuo quadrato ſarebbe 13924 ſolamente; ed il 174 è radice quadra proſſima al 30277, eſſendo il quadrato di eſſa alquanto minore 30276) e della frazione medeſima dovrebbe dirſi radice quadra $\frac{59}{87}$, che è la ſteſſa con $\frac{118}{174}$, eſſendo queſti due numeri pari, e però diviſibili ambidue per mezzo nell' altra addotta frazione radicale. Parimente della frazione $\frac{68921}{884735}$ la radice cubica proſſima ſarà $\frac{41}{96}$, perchè il cubo di queſta ſarebbe $\frac{68921}{884736}$ proſſimo a quello.

Finalmente ſi oſſervi, che alcuni chiamano *Inneſtamenti*, o pure *Infilzamenti* di varie frazioni il prendere alcuni rotti di altri rotti, per eſempio $\frac{1}{3}$ di $\frac{3}{4}$ di $\frac{3}{5}$ di $\frac{4}{7}$, o a ſoli due per volta, o a tre, o a molti altri, il che quantunque torni difficile a molti, che non trovano la maniera di calcolarli, ſi può facilmente fare, baſtando moltiplicare inſieme i loro numeratori, ed inſieme parimente i denominatori di eſſe frazioni, e fattaſi la frazione col prodotto di quello e di queſto, ne riuſcirà il deſiderato infilzamento. Così de' quattro rotti ſopra propoſti, ne deve riuſcire $\frac{36}{420}$, uguale a $\frac{3}{35}$, dividendoſi per 12 tanto il numeratore quanto il deno-

no-

nominatore; imperocchè moltiplicati insieme i numeratori delle date frazioni 1, 3, 3, e 4, fanno 36, e moltiplicati i loro denominatori 3, 4, 5, e 7, fanno 420. Che ciò sia ben fatto si può così dimostrare $\frac{1}{3}$, di $\frac{3}{4}$ certamente è $\frac{1}{4}$, ed $\frac{1}{4}$ di $\frac{3}{5}$ (che è lo stesso di $\frac{12}{20}$ moltiplicando il numeratore, ed il denominatore per 4) sarà $\frac{3}{20}$, e questo di $\frac{4}{7}$ (che sarebbe il medesimo $\frac{40}{70}$ moltiplicati ambi li numeri per 10) sarà $\frac{6}{70}$, perchè nel 40 il 20, è due volte, onde siccome $\frac{1}{20}$ sarebbe $\frac{2}{70}$, così il $\frac{3}{20}$ è $\frac{6}{70}$; il che per 6 moltiplicato riesce $\frac{36}{420}$, come si era trovato di sopra, uguale però a $\frac{3}{35}$, che sarà la semplice frazione, che riesce nell' infilzamento di $\frac{1}{3}$ del $\frac{3}{4}$, del $\frac{3}{5}$, e del $\frac{4}{7}$. Il che &c.

CAPITOLO XII.

Della Regola del Tre.

QUando tre quantità sono proposte in numeri, e si cerca una quarta, che corrisponda proporzionale alla terza, come la seconda alla prima, allora vi bisogna la regola del Tre; che brevemente si fa così. Si moltiplichi il secondo termine col terzo, e dividasi il prodotto per il primo, sarà il quoziente quel termine quarto che si ricercava, proporzionale a' tre dati. Per esempio, se un Drappo di braccia 30 costasse scudi 50, e si cercasse comprarne braccia 12, si domanda quanti scudi ci vorranno? Si moltipichi il secondo numero 50 nel terzo, che è 12, il prodotto sarà 600, e questo si divida per il primo nu-

```
      50 — 12
     ----
     600
 30)  20
```

mero 30., onde riesce il quoziente 20; però le braccia 12 importeranno 20 scudi.

Conviene avvertire, che alle volte il quesito non è proposto con ordine; per esempio chi dicesse, essendo che 30 braccia mi costano scudi 50, volendo spendere solamente scudi 20, quante braccia potrò averne? La questione non è proposta ordinatamente, ma si dovea dire, se scudi 50 ci danno 30 braccia, con scudi 20 quante braccia si compreranno? e così moltiplicato il secondo nel terzo, che fa 600, e questo diviso per il primo 50 riuscirà 12, che sarà il numero delle braccia ricercate con scudi 20. Però bisogna talmente disporre i termini del quesito, che le cagioni e gli effetti siano in un luogo simile, onde corrisponda il primo al terzo, ed il secondo al quarto quesito, però se nel terzo termine si pongono gli scudi, e si cerca nel quarto il numero di braccia, conviene nel primo termine proporre gli scudi, e nel secondo le braccia che gli corrispondono, e così similmente nelle altre proposte.

Alle volte però conviene adoperare la regola del tre a roverscio, moltiplicando il primo termine nel secondo, e dividendo il prodotto pel terzo, cioè, quando il quarto termine proporzionale, che si cerca, non corrisponde direttamente al suo omologo, ma reciprocamente, cioè quando crescendo il terzo non deve crescere il quarto, ma farsi minore del secondo, come il primo è minore del terzo; per esempio. Suppongo che a spazzare tutte le strade di una Città, o farvi qualche altra opera, 3 uomini la compisca-

piscano in 8 giorni, si cerca di 12 uomini in quanti giorni la compirebbero? Si moltiplichi il primo nel secondo, cioè 3 via 8, che farà 24, e si divida questo per il terzo numero, che è 12, ne riescono 2 giorni, ne' quali questi 12 uomini potranno fare lo stesso, essendo proporzionale 2 ad 8, come 3 a 12, cioè la quarta parte di essi.

Ma se i termini non sono ne direttamente, ne reciprocamente proporzionali, allora non conviene usare questa regola. Per esempio, se una carrozza con 2 cavalli fa 3 miglia in un ora, quante miglia farebbe con 6 cavalli nell' ora medesima? Non crescendo il numero delle miglia a proporzione del numero de' cavalli, che tirano nel medesimo tempo la carrozza (altrimenti 6 cavalli farebbero 9 miglia in un ora, perchè 3 via 6 fa 18, e diviso per 2 resta 9, il che è falsissimo) però non conviene adoperare tal regola, se non quando i termini crescono proporzionalmente, o con diretta o con reciproca proporzione.

La regola del tre dovrà alle volte maggiormente comporsi, quando saranno proposti più di tre termini, come sarebbe in quest' altro quesito. Se 4 uomini in 7 giorni scavano una fossa di braccia 252; postivi 10 uomini similissimi lavoratori, in 13 giorni quante braccia ne scaverebbero?

4	7	252	10	13
4 ——	7		10 ——	13
28			130	

Bisogna ridurre i due primi numeri in un solo prodotto, con la moltiplicazione di essi, cioè, 4 via 7 fa 28, e poi moltiplicare insieme gli due ultimi 10 via 13, che fanno 130, imperocchè 4 uomini in 7 giorni faranno lo stesso, che un solo uomo in giorni 28, e quello si farebbe da 10 uomini in 28 giorni, si farebbe pure da uno in giorni 130, però il quesito sarà simile a questo;

28 252 130

252 —— 130

32760

28) 1170

se da un Uomo in 28 giorni si fanno 252 braccia, dal medesimo uomo in 130 giorni quante braccia se ne farebbero? Si moltiplichi il secondo nel terzo, cioè 252 in 130, che ne riuscirà 32760, e questo diviso per il primo numero 28, riuscirà 1170; dunque saranno queste le braccia, che in 13 giorni scaverebbero 10 uomini, ovvero un uomo solo in giorni 130.

Talvolta ancora si potrà replicare la regola del tre, in due, o più volte. Per esempio, se un uomo in 4 mesi, con 30 scudi prestati ad un altro, ne ha guadagnati $2\frac{1}{2}$, in quanto tempo prestando 600 scudi, ne potrebbe guadagnare 200?

4 30 $2\frac{1}{2}$ 600 200

Primieramente, siccome in 4 mesi gli 30 scudi, hanno guadagnato $2\frac{1}{2}$, così nello stesso tempo

quanti

quanti se ne guadagnerebbero con 600 scudi?

30 $2\frac{1}{2}$ 600

$$\begin{array}{r} 600 \text{ —— } 2\frac{1}{2} \\ \hline 30)\ 1500 \\ 50 \end{array}$$

moltiplicato il $2\frac{1}{2}$ in 600, diviene 1500, e diviso per 30, ne riesce 50; Quindi però si faccia un altra regola del tre, dicendo;

50 4 200

$$\begin{array}{r} 200 \text{ —— } 4 \\ \hline 50)\ 800 \\ 16 \end{array}$$

se si averebbero (dalli scudi 600) scudi 50 in mesi 4, gli scudi 200 in quanti mesi si acquisterebbero? Moltiplicato il 4 in 200 fa 800, e questo diviso per 50, ne viene 16; dunque in un anno, e nel terzo dell'anno seguente, che saranno mesi 16, verranno acquistati gli scudi 200 per li 600 proposti. Così parimente farassi in altri quesiti proposti.

CAPITOLO XIII.

Della Regola di Compagnia.

QUando più persone concorrono ad un negozio, contribuendo parte del loro danaro, gua-

guadagnano a proporzione del capitale che hanno impiegato a benefizio di quel negozio, allora per sapere distribuire a ciascuno quel guadagno, che giustamente gli tocca, bisogna si adoperi la presente regola. Si raccolgono in una somma i capitali contribuiti da ciascuno, e paragonasi questa somma col guadagno comune, poi si cava dal particolar capitale di uno, quale sia il frutto, che gli si deve, onde con la regola del tre si trova il guadagno di questo, e di quell' altro mercante.

Suppongasi per esempio, che Pietro contribuisse per una mercanzia, o per un negozio scudi 1600, Giovanni scudi 1450, e Martino scudi 1500, che in tutto sommati sono 4550, ed il guadagno comune rimanendovi impiegato il capitale di tutti, si suppone che importi al netto scudi 2460; cercasi come debba distribuirsi a ciascheduno la somma di questi danari acquistati in un medesimo tempo. Bisogna dire in questo modo; se tutto il capitale, che è 4550, ha acquistato per il comun guadagno 2460, che cosa importerà di guadagno il capitale di Pietro 1600? si moltiplichi per la regola del tre, il secondo numero 2460 col terzo 1600, e riuscirà 3936000, il che dividasi pel primo 4550, e ne riusciranno scudi 865 con la frazione $\frac{250}{4550}$, che sarebbe $\frac{5}{91}$, (diviso per 50 tanto il numeratore quanto il denominatore) sicchè il guadagno di Pietro sarà scudi appunto $865 \frac{5}{91}$.

Similmente il capitale di Giovanni, che è scudi 1450, si moltiplichi con lo stesso comun guadagno 2460, e ne riuscirà 3567000, il che diviso

so pure pel primo numero 4550, ci darà il guadagno di Giovanni 783, con la frazione $\frac{4350}{4550}$, uguale ad $\frac{87}{91}$, diviso pure come l' altro per 50 tanto il numeratore, quanto il denominatore di essa frazione.

Finalmente il capitale di Martino essendo 1500 moltiplicato pure in 2460, sarà 3690000, che diviso per 4550, ci darà per guadagno di Martino scudi 810 con la frazione $\frac{4500}{4550}$, che sarà $\frac{90}{91}$, essendo similmente diviso l' uno e l' altro numero superiore, ed inferiore per 50; e può ancora provarsi essere appunto questi tre guadagni uguali a tutto il comune, mentre il primo 865 $\frac{5}{91}$, col secondo 783 $\frac{87}{91}$, ed il terzo 810 $\frac{90}{91}$ sommati insieme sono uguali al numero 2458 $\frac{182}{91}$, la qual somma di frazioni è uguale a 2, essendo 182 il doppio di 91; onde aggiunto il 2 alla somma delli interi 2458, fa per appnuto il 2460.

Ma se questi Mercanti avessero dato il danaro per diverso tempo, cioè Pietro per 2 anni, Giovanni per 3, Martino per 6, e con tutto quello stesso capitale di scudi 4550 avessero pure guadagnati gli scudi medesimi 2460; si cercherà, quanto di questo guadagno debba loro distribuirsi, oltre la restituzione del capitale, da farsi loro in quei tempi determinati. Si moltiplichi qualunque capitale per il numero degli anni, ne' quali fu concesso, cioè quello di Pietro scudi 1600 per 2 anni fa 3200, quello di Giovanni 1450 per 3 anni fa 4350, l' altro di Martino 1500 per 6 anni fa 9000, e ciascheduno di tali prodotti, moltiplicato per il comune guadagno 2460, e diviso per la somma di quei prodotti, che è

16550, ci determinerà quello che deve darsi a ciascuno. Quindi il 3200 moltiplicato per 2460 farà 7872000, che diviso per 16550, riuscirà per guadagno di Pietro 475 $\frac{10750}{16550}$, la qual frazione può ridursi a $\frac{215}{331}$ (diviso pure l' uno e l'altro numero per 50); l'altro numero 4350 moltiplicato per 2460 fa 10701000, che diviso per lo stesso 16550, darà a Giovanni 646 $\frac{9700}{16550}$, la qual frazione similmente si riduce a $\frac{194}{331}$; e finalmente il terzo numero 9000 moltiplicato per 2460, fa 22140000, il che diviso per 16550, ci dà 1337 $\frac{12650}{16550}$, la qual frazione riesce pure $\frac{253}{331}$, e questo sarà il guadagno di Martino; in fatti la somma di questi tre numeri interi sarebbe 2458, che così importano li tre numeri 475, 646, e 1337, e le tre frazioni $\frac{215}{331}$, $\frac{194}{331}$, $\frac{253}{331}$, fanno $\frac{662}{331}$, che è uguale a 2, il che aggiunto all'intera somma 2458 farà per appunto 2460, che è tutto il guadagno distribuito a' tre Mercanti, come si è detto 475 $\frac{215}{331}$ a Pietro, 646 $\frac{194}{331}$ a Giovanni, e 1337 $\frac{253}{331}$ a Martino, che ha più degli altri per aver dato il capitale in maggior tempo.

Altri tre uomini, Alessandro, Giorgio, e Lorenzo, dicono d' avere fra tutti guadagnata la somma di 2800 scudi, avendo il primo Alessandro posto di capitale scudi 2000, ed il secondo 2350, che fu Giorgio, ma non si ricorda quanti ne ponesse il terzo, cioè Lorenzo, e solamente sapevasi, che per lui vi erano di guadagno scudi 100, però si cerca, quanti scudi di capitale ne avesse dati? e viceversa, quanti ne guadagnasse Alessandro, e quanti ne avesse Giorgio? Per ritrovare tuttociò, primieramente dal comun guada-

da-

dagno di scudi 2800, se ne sottragga il guadagno di 100 venuto a Lorenzo, ne rimarranno scudi 2700, che saranno convenuti ad ambidue gli precedenti Alessandro, e Giorgio; e presa la somma degli scudi già da loro proposti 2000 e 2350, che è 4350, con la regola del tre si moltiplichi la somma del guadagno de' due primi 2700, con gli scudi 2000 dati dal primo, ed il prodotto 5400000, si divida per la somma 4350 degli scudi dati da ambidue, che sarà 1241 $\frac{1650}{4350}$, la qual frazione divisa nel numeratore e nel denominatore per 50, diventerà $\frac{33}{87}$, anzi questi due numeri divisi per 3, saranno la frazione $\frac{11}{29}$; sicchè il guadagno di Alessandro sarà 1241 $\frac{11}{29}$, essendo ciò proporzionale alla somma degli scudi 2000 da lui proposti, come il guadagno d'ambidue 2700, alla somma 4350 degli scudi da loro insieme dati. Onde poi il resto del guadagno de' due primi 2700, levatogli 1241 $\frac{11}{29}$, che rimarrà 1458 $\frac{18}{29}$, sarà pure il guadagno del secondo, cioè di Giorgio. Ci resta poi da trovare, quale sia il numero degli scudi dati dal terzo, cioè da Lorenzo, e si troverà con quest' altra regola del tre, dovendo essere nella stessa proporzione, come il guadagno delli due precedenti 2700 al loro capitale degli scudi proposti 4350, così il guadagno del terzo 100, al capitale del medesimo Lorenzo; però moltiplicato 4350 in 100, che diverrà 435000, dividendolo per 2700, che riesce $\frac{435000}{2700}$ uguale a $\frac{4350}{27}$ (levati di sopra, e di sotto li due zeri) onde proviene 161 $\frac{3}{27}$, che è lo stesso capitale da esso dato di scudi 161 $\frac{1}{9}$; (perchè il 3, ed il 27 si possono dividere per 3.)

Ecco

Ecco adunque ritrovato, e i guadagni di Alessandro e di Giorgio, ed il capitale degli scudi dati da Lorenzo.

CAPITOLO XIV.

Della Regola di Alligazione.

Quando si mescolano insieme varie materie di prezzo diverso, bisogna trovare il valore corrispondente a ciascuna misura della materia così mescolata: e viceversa, proposto qualche prezzo mediocre, tra i prezzi particolari di due materie, occorre ricercare, in quale quantità debbono questa e quella mescolarsi, per poterne vendere il tutto al prezzo mediocre assegnato. L' una e l' altra di tali operazioni si regolano nel modo, che insegna questa regola detta di Alligazione, come si vedrà in questi esempj.

Primieramente, per sciogliere il primo quesito, si raccolgano in una somma i numeri delle misure mescolate; Si raccolga altresì in una somma il valore corrispondente a ciascuna di esse, e si divida questa seconda somma per la prima, sarà tal quoziente il valore di una misura della materia mescolata. Per esempio: un Orefice ha tre sorte di argenti, il primo vale 9 lire l' oncia, il secondo 7 lire, e il terzo 6 lire; ne mescola insieme 18 once del primo, 10 del secondo, e 12 del terzo, si cerca, quale sarà il giusto prezzo di qualunque oncia della massa così mescolata. Si raccolga in una somma il numero

dell'

18	—— a lire	9	——	162
10	—— a	7	——	70
12	—— a	6	——	72
40				304
			40)	$7 \frac{3}{5}$

dell' once insieme mescolate, che 18, 10, e 12, ne sono 40, e perchè l' once 18 del primo a 9 lire l' una nè importano 162, e le 10 del secondo a 7 lire di ciascuna ne importa 70, e le 12 del terzo a 6 lire l' una ne danno lire 72, raccogliendo insieme questi prezzi 162, 70, e 72, importa tutta la massa lire 304; però dividendo tal somma per il numero dell' once 40, ne risulta il prezzo di qualunque oncia lire 7 e 12 soldi; imperocchè 40 via 7 farebbe 280, sicchè tolto ciò dal 304, ne rimane 24; dunque diviso il 304 per 40 riesce lire $7 \frac{24}{40}$, la qual frazione ha i numeri divisibili per 8, onde rimane $7 \frac{3}{5}$; però la quinta parte della lira (composta in Toscana di 20 soldi) essendo 4 soldi, i $\frac{3}{5}$ sono appunto 12 soldi da aggiungersi alle 7 lire per ciaschedun oncia di quella somma d'argento.

Volendo poi sciogliere il secondo quesito, si deve pigliare la differenza del prezzo mediocre dal prezzo massimo, e l' eccesso del mediocre dal minimo; indi alternativamente si piglino tante misure della materia di maggior valore, quante sono le unità dell' eccesso del mediocre sopra il minimo, e poi si aggiungano tante misure della materia di minor valore, quante unità sono nella differenza del prezzo mediocre dal massimo;

così

così con queste misure si farà una massa da vendersi al prezzo mediocre proposto.

Per esempio, un Mercante ha due specie di vino, o d'olio, delle quali la prima importa di prezzo soldi 20 il fiasco, e la seconda soldi 13 solamente; vorrebbe egli mescolarli in tal dose, che si dovesse vendere soldi 15 il fiasco, onde ricerca quanti fiaschi dell' uno e dell' altro debba insieme unire. Si osservi, che la differenza del prezzo mediocre 15 dal maggiore 20, è di 5, e la differenza del prezzo minimo 13 dallo stesso mediocre, è solamente 2; si piglino adunque 2 misure della prima specie, e 5 dell' altra minima, e si mescolino insieme; così riusciranno 7 misure mescolate da vendersi al prezzo mediocre proposto di soldi 15 il fiasco; Imperocchè il valore di 2 misure del massimo prezzo 20 sarebbe soldi 40, ed il valore di 5 misure del minimo prezzo 15 sarebbe soldi 65; e però il valore di tutte quelle 7 misure sarà soldi 105, che divisi per 7, danno 15 soldi per ciascheduna misura, il che appunto è il prezzo mediocre proposto; e siccome ciò avviene, presi due fiaschi del maggior prezzo, e cinque fiaschi del minore, così ancora si potranno mescolare due barili del primo, con cinque barili del secondo; e lo stesso si farebbe con qualunque misura dell' uno e dell' altro, con simile proporzione mescolata.

Se occorresse di mescolare insieme più di due specie di roba: per esempio, il primo vino che costa 18 soldi il fiasco; il secondo che ne costa 13 soldi, il terzo che ne costa 10 soldi; e si vorreb-

rebbero mescolare in maniera, che possa vendersi 15 soldi il fiasco; si pigli la differenza di questo mediocre prezzo 15 dal maggiore 18, che è 3, indi la differenza del medesimo 15 dal minore 13, che sarà 2, e dal minimo 10, che è 5; poscia si piglino 2 misure del primo, e 3 del secondo, come si è veduto doversi fare nel caso di sopra, tra il primo e il secondo: e dipoi 5 altre misure del primo, e 3 del terzo, come importerebbe la sola mescolanza di questi due, ne avremo adunque 7 misure del primo, 3 del secondo, e 3 pure del terzo, che in tutto saranno 13, e dovranno valere 15 soldi per fiasco, cioè 195 soldi in tutto, perchè 7 del primo, che vale 18 per ciascun fiasco, ne importa 126, 3 del secondo, che ne vale 13 per ciascuno, ne importa 39, e i 3 del terzo, che ne vale 10 per qualunque fiasco, ne importa 30, le quali misure portano similmente lo stesso prezzo di 195.

E se fossero ancora da unirsi più specie diverse, come se la libbra di Pepe valesse 3 paoli, quella di Garofano paoli 2, quella di Cannella paoli 6, e quella di Zafferano paoli 9, e si volessero mescolare in maniera, che si paghi paoli 5 la libbra; notata la differenza di ciascun prezzo dal medio *M*, che sarà dal Pepe *P.* 2 paoli, dal Garofano *G.* 3 paoli, dalla Cannella *C.* paoli 1, e dal Zafferano *Z.* paoli 4; si pongano tante libbre del Pepe, e del Garofano, che sono di minor prezzo del

P.	3		2
G.	2		3
M.		5	
C.	6		1
Z.	9		4

G me-

medio, quanta è l' altra somma delle differenze di esso medio, dagli altri due della Cannella, e del Zafferano, che hanno prezzo maggiore; e poi tante libbre di Cannella e di Zafferano, quanta è la somma delle differenze del medio da gli altri due Pepe e Garofano, che hanno prezzo minore; sicchè 1 e 4 facendo 5, basta prendere 5 libbre di Pepe, e libbre 5 di Garofano; ed essendo ancora le differenze 2 e 3 parimente uguali a 5 (se fossero in altro numero, in quello si prenderebbero pure gli altri) si potranno prendere altresì libbre 5 di Cannella, e libbre 5 di Zafferano, e così la somma di tali robe mescolate, dovrà pure farsi pagare a 5 paoli la libbra; imperocchè libbre 5 di Pepe costano paoli 15, altrettante di Garofano paoli 10, quelle pure della Cannella paoli 30, e le altre cinque di Zafferano paoli 45, la cui somma è 100, però essendo tutto il mescuglio di queste quattro cose libbre 20, avendone 5 ciascheduna, è chiaro che i paoli 100 con cui si comprano, corrispondono per l' appunto 5 a ciascuna delle stesse libbre 20, e così potrà farsi qualunque altra mescolanza di più cose, con questa Regola di Alligazione, purchè il prezzo che si vuole che abbia la loro somma sia medio, cioè maggiore di quello di alcuni, e minore di quello degli altri.

5 *P.*	—	15
5 *G.*	—	10
5 *C.*	—	30
5 *Z.*	—	45
		100

Se volesse uno farsi fare una Statua di libbre 35 d' argento, e pagare 86 paoli ciascuna libbra, non potendo pagarla tutta, se non con paoli

3010; l' Argentiere, che avea una sorte d' argento di paoli 90 la libbra, un altra di 84, ed una terza di 80 paoli la libbra, come potrà mescolare quelle sorti d' argento, perchè la Statua di 35 libbre venisse a costare paoli 86 la libbra? Io dico che dovrà dargli del primo argento libbre 17 $\frac{1}{2}$, del secondo e del terzo libbre 8, con 9 once tanto dell' uno quanto dell' altro, la somma delle quali sarà le libbre 35, che a paoli 86 l' una, importeranno paoli 3010; imperocchè le libbre 17 $\frac{1}{2}$ del primo, di cui ciascuna libbra nè vuole 90 paoli, importeranno paoli 1575: le libbre 8 del secondo a paoli 84 di ciascheduna, saranno paoli 672, e le 9 once, che sono 3 quarti della libbra, ne importano paoli 63, e però tutto il prezzo di libbre 8 e 9 once, importa paoli 735; le libbre poi del terzo argento, essendo 8, importa paoli 640, e le sue once 9, che sono tre quarti della libbra, ne importano paoli 60, onde tutto il di lui prezzo sarà paoli 700, le quali tre somme importeranno pure paoli 3010, come si vuol dare per tutto l' argento di 35 libbre della Statua.

Libbre.	*Once.*
17	6
8	9
8	9
35	—

1575
735
700
3010

Come siansi trovati questi numeri delle libbre di tali argenti, può dimostrarsi così: si trovino le differenze del medio 86 dal primo 90, che è 4, e dal secondo 84, che è 2, e dal terzo 80, che è 6, però del primo prendasi le libbre 2

G 2 e le

e le libbre 6, che sono libbre 8, e del secondo e del terzo si prendano le libbre 4, secondo le addotte differenze; quindi sarebbero 16 libbre composte delle 8 del primo argento, di 4 del secondo, e di altre 4 del terzo, le quali libbre costeranno paoli 86 per ciascheduna, essendo 16 via 86 uguale a 1376, siccome 8 via 90 uguale a 720 e 4 via 84 uguale a 336, e 4 via 80 uguale a 320, che pure posti insieme sommano 1376; ma dovendo averne non solo quelle 16 libbre, che costano paoli 1376, ma libbre 35, che sono il doppio e $\frac{3}{16}$; perciò del primo argento prese 16, del secondo 8, e pure del terzo 8, diventeranno 32, e dovendo aggiungergli altre 3, il primo (che ha sempre il doppio del secondo e del terzo, cioè ad ambidue uguale) deve pure accrescersi di una libbra e mezza, e l' altra libbra e mezza negli altri due, dividendole ugualmente in ciascuno, che però si aggiungono once 9 al secondo, ed once 9 al terzo, le quali prese insieme sono 18, onde le libbre del primo devono essere $17\frac{1}{2}$, del secondo 8 libbre con 9 once, e del terzo altrettanto, come sopra si è detto.

P.	90	4
M.	86	
S.	84	2
T.	80	9

720
336
320
———
1376

CA-

CAPITOLO XV.

Della Regola del Falso.

DA un falso supposto si cava la vera ipotesi di qualche ignoto quesito, allorchè dipende dalla moltiplicazione, dalla divisione, o da qualche proporzionalità, e questa Regola chiamasi *di Falsa posizione*, a differenza della Regola *di doppia falsa posizione*, la quale si può ancora adoperare in quelle questioni, in cui entra la sottrazione e l'addizione.

Per esempio della prima; uno abbia lasciati sette mila scudi da distribuirsi a tre figliuoli, in maniera però, che la porzione del primo sia tripla di quella del secondo, e quella pure del secondo sia doppia di quella del terzo; si cerca, come debba farsi questa distribuzione? Suppongasi ad arbitrio, che di qualsivoglia numero, per esempio, ne tocchino 50 al terzo figliuolo, ne dovranno toccare 100 al secondo, e 300 al primo, avendo il primo un triplo del secondo, ed il secondo un duplo del terzo; dunque tutti sarebbero solamente scudi 450, ma doveano essere 7000, dunque è falso il supposto; quindi però se ne caverà il vero, dicendo per la regola del tre, se 450 vengono dalla falsa ipotesi della porzione supposta di soli scudi 50 dati al terzo figliuolo, gli scudi 7000, qual vera porzione importeranno al medesimo terzo figliuolo? ed operando al solito si moltiplichi il secondo nel terzo, cioè 50 in 7000, ne risulterà 350000, e questo diviso per

il primo numero 450, ne riuſcirà 777 $\frac{7}{9}$; onde queſto dovrà veramente darſi al terzo figliuolo,
il doppio 1555 $\frac{5}{9}$ al ſecondo, ed il triplo di queſto, che ſarà 4666 $\frac{6}{9}$ (cioè 4666 $\frac{2}{3}$) al primo, la ſomma de' quali è 7000; cioè appunto gli ſcudi laſciati dal Padre a gli ſteſſi figliuoli, con la ſuddetta condizione, onde ſi è ritrovata la vera diſtribuzione, che dovea farſi.

$$\begin{array}{r} 777\frac{7}{9} \\ 1555\frac{5}{9} \\ 4666\frac{6}{9} \\ \hline 7000 \end{array}$$

Similmente dicendoſi da un Signore, di avere con 275 ſcudi fatta comprare una carrozza, un caleſſe, e due cavalli, e che il prezzo della carrozza fu triplo di quello del caleſſe, e i cavalli coſtarono tre metà del prezzo di eſſo caleſſe; ſi cerca, quale era il prezzo della carrozza, quale del caleſſe, e quale de' due cavalli? Suppongaſi benchè falſamente, che ſi compraſſero i cavalli con ſcudi 12, però il caleſſe ne importerebbe 8, eſſendo il 12 tre metà di 8, cioè 3 volte 4, e la carrozza ne averebbe avuti 24, coſtando il triplo del caleſſe, e la ſomma di queſti tre prezzi ſarebbe 44, e con la regola del tre, ſiccome è il 44 al prezzo di alcuna di queſte coſe, per eſempio a quello del caleſſe, che è 8; così i 275 ſcudi ſpeſi da quel Signore, averanno la ſteſſa proporzione al ſuo vero prezzo del caleſſe; onde moltiplicando l' 8 in 275 ſi averà 2200, che diviſo per 44 ne dà 50; dunque 50 ſcudi è il vero prezzo del caleſſe, ed il triplo di eſſo 150 ſarà il prezzo della carrozza, e quello de' cavalli, che ha tre metà di

$$\begin{array}{r} 12 \\ 8 \\ 24 \\ \hline 44 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ 150 \\ 75 \\ \hline 275 \end{array}$$

di 50 (prezzo del Calesse) riuscirà 75, la somma de' quali prezzi è appunto il 275, che tanti sono gli scudi pagati da esso Signore in queste tre compre.

La regola poi della doppia falsa posizione, si fa in quest' altra maniera, esaminando la questione prima, per qualunque falso numero, e poi per un altro: se tutti due sono maggiori o tutti due minori del numero vero, se ne notano gli eccessi, e i difetti; indi moltiplicando alternativamente la prima posizione per l' errore della seconda, e la seconda posizione per l'errore della prima, la differenza di questi prodotti, si divide per la differenza d' ambi gli errori, ed il quoziente sarà il vero numero ricercato; ma se uno degli errori fosse maggiore del vero numero, e l' altro minore di esso, si piglia la somma di que' prodotti, e dividesi per la somma d' ambi gli errori, ed il quoziente ci darà pure il proprio numero, che ricercavasi.

Per esempio; interrogato un Pastore, quante fossero le sue pecore. Rispose. Se fossero altrettante, con la metà di tante, e con un terzo di tante, aggiuntavi la mia persona, saremmo appunto 120; si cerca quante fossero tali pecore? Suppongo a capriccio, che fossero 12, le quali raddoppiate diventerebbero 24, ed aggiunta la metà di esse, sarebbero 30, essendo il 6 la metà di 12, la cui terza parte essendo poi 4, aggiuntovi questo diventerebbero 34, e col pastore 35; ma dovevano essere 120, dunque l' errore è un difetto di 85. Suppongasi un altra volta, che le pecore fossero 18, il loro doppio 36, ed

aggiuntavi la metà di esse, che è 9 diventerebbero 45, poi adattatovi il terzo delle medesime, cioè 6, diventerebbero 51, e computatovi il Pastore, sarebbero 52, il che differisce dal numero proposto 120 per 68. Si moltiplichi adunque la prima ipotesi 12 pel secondo difetto 68, del che ne proviene 816, e moltiplicando la seconda ipotesi 18 pel difetto 85 della prima, ne proviene 1530; ed essendo gli errori simili, piglio la differenza

12 18
85 68
1530 816

di questi prodotti, che è 714, e la divido per la differenza de' suddetti errori 68 e 85, che è 17, onde rimane il quoziente 42, e questo appunto sarà il numero delle pecore, il cui doppio sarebbe 84, ed aggiuntovi la metà di 42, che è 21, si fa 105, e col terzo di esso 42, che è 14, ne risulterà 119, che con il Pastore saranno appunto 120, siccome era proposto.

Ma se la seconda porzione fosse stata maggiore, supponendo per esempio, che le pecore fossero 48, e duplicate sarebbero 96, e con la metà di esse, cioè 24, diventerebbero 120, e con la terza loro parte, cioè 16, si sarebbero 136; e col Pastore rimarrebbero 137, onde sopra il dato numero 120 vi sarebbe l' eccesso 17, onde moltiplicata la prima posizione 12 con questo eccesso 17, diviene 204, e moltiplicata la secon-

da

da posizione 48 col difetto della prima 85, si produce 4080; ed ora deve pigliarsi la somma di tali prodotti, che sarà 4284, e dividerla per la somma di quegli errori 17 e 85, eccesso e difetto, che fanno 102, per la quale divisione parimente risulta il 42 vero numero di esse pecore, come si è veduto di sopra.

La miglior regola però di tutte queste questioni, ancora più intrigate, sarebbe quella dell'Algebra, che è più universale, e più esatta, la quale però in queste brevi instruzioui non può spiegarsi a dovere, richiedendo ciò una nuova maniera di calcolo, che si vedrà a suo luogo nelle Instituzioni Algebratiche.

CAPITOLO XVI.

Delle Combinazioni del Lotto, che suol farsi in Genova, in Milano, in Roma, ed altrove.

Dovendosi fare l' estrazione di 5, dal numero di 100, o di 90 uomini, o di più o di meno in qualche luogo, molti sogliono concorrere con i suoi danari a nominarne uno, o due, o tre, o quattro, o cinque di quelli che saranno estratti per sorte da tutto il numero di essi; Però in quante maniere si possa guadagnare, o perdere intorno a ciò che da costoro sia stato proposto, si potrà cavare da quel che si anderà quivi dimostrando.

Conviene però determinare in quante maniere da un dato numero di varj uomini, si possa per sor-

te,

te cavare il quintuplo, o il quadruplo, o il triplo, o il duplo, o altro calcolo di essi. Certamente il cavarne uno, quante volte può occorrere, quanti sono gli uomini proposti da cavarsi; ma il cavarne 2, dipende dalla somma di tutti i numeri antecedenti al numero degli stessi proposti; il cavarne 3, dipende pure dalla somma de' numeri de i due corrispondenti a ciascuno de' precedenti numeri; similmente il cavarne 4, dipende dalla somma de' numeri dei tre in ciascuno de' numeri antecedenti; e così il cavarne 5, dipende dalla somma de' numeri de i quattro pure in qualunque de' numeri precedenti.

Suppongasi, che proposti siano solamente 7 uomini *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*; se si deve cavarne un solo, certo qualunque di essi può esserne levato, onde pure in 7 maniere se ne caverà uno diverso; se si devono cavarne due, potranno essere, o solamente *ab*, ò pure *ac*, ò *ad*, ò *ae*, ò *af*, ò *ag*, ò *bc*, ò *bd*, ò *be*, ò *bf*, ò *bg*, ò *cd*, ò *ce*, ò *cf*, ò *cg*, ò *de*, ò *df*, ò *dg*, ò *ef*, ò *eg*, ò *fg*, che sono 21 maniera con cui se ne cavano 2, ed essendo appunto i numeri antecedenti al 7, cioè 6, 5, 4, 3, 2, 1, sommati insieme uguali a 21: perciò si fa manifesto, che il numero de' bini uomini, che possono estraersi da un proposto numero di tutti, è uguale alla somma di tutti i numeri precedenti, onde il numero di 2 in due proposti è 1 bino, in tre proposti è 3 bini, in 4 è 6, in 5 è 10, in 6 è 15, che insieme fanno 35, e tanti saranno i suoi ternarj, che appunto dovranno essere *abc*, *abd*, *abe*, *abf*, *abg*, *acd*, *ace*, *acf*, *acg*, *ade*, *adf*, *adg*, *aef*, *aeg*, *afg*, *bcd*, *bce*, *bcf*,

bcf, bcg, bde, bdf, bdg, bef, beg, bfg, cde, cdf, cdg, cef, ceg, cfg, def, deg, dfg, efg; I quadernarj pure faranno altrettanti, cioè 35 (perchè i ternarj di 6 farebbero 20, e di 5 faranno 10, e di 4 faranno 4, e di 3 un folo, che pure tutti quefti numeri fanno 35) riducendo *abcd, abce, abcf, abcg, abde, abdf, abdg, abef, abeg, abfg, acde, acdf, acdg, acef, aceg, acfg, adef, adeg, adfg, aefg, bcde, bcdf, bcdg, bcef, bceg, bcfg, bdef, bdeg, bdfg, befg, cdef, cdeg, cdfg, cefg, defg*: E i quinarj farebbero 21 (effendo i quaternarj nel numero 6 folamente 15, nel numero 5, appunto 5, e nel 4 un folo, che fanno appnnto 21) cioè, *abefg, abcde, abcdf, abcdg, abcef, abceg, abcfg, abdef, abdeg, abdfg, acdef, acdeg, acdfg, acefg, adefg, bcdef, bcdeg, bcdfg, bcefg, cdefg, bdefg*.

E ciò bafti di aver dimoftrato in quefti pochi numeri di 7, perchè ne' maggiori numeri troppo maggiori farebbero le poffibili eftrazioni di effi; però nella feguente tavola fi efporranno i numeri de' quintupli, de' quadrupli, de' ternarj, e de' duplici in ciafcun numero prolungato fino a i 100.

Unità

Unità	Binarj.	Ternarj.	Quadernarj.	Quinarj.
1				
2	1			
3	3	1		
4	6	4	1	
5	10	10	5	1
6	15	20	15	6
7	21	35	35	21
8	28	56	70	56
9	36	84	126	126
10	45	120	210	252
11	55	165	330	462
12	66	220	495	792
13	78	286	715	1287
14	91	364	1001	2002
15	105	455	1365	3003
16	120	560	1820	4368
17	136	680	2380	6188
18	153	816	3060	8568

Unità,	Binarj	Ternarj.	Quadernarj.	Quinarj.
19	171	969	3876	11628
20	190	1140	4845	15504
21	210	1330	5985	20349
22	231	1540	7315	26334
23	253	1771	8855	33649
24	276	2024	10626	42504
25	300	2300	12650	53130
26	325	2600	14950	65780
27	351	2925	17580	80730
28	378	3276	20475	98280
29	406	3654	23751	118755
30	435	4060	27405	142506
31	465	4495	31465	169911
32	496	4960	35960	201376
33	528	5456	40920	237336
34	561	5984	46376	278256
35	595	6545	52360	324632
36	630	7140	58905	376992

Unità.	*Binarj.*	*Ternarj.*	*Quadernarj.*	*Quinarj.*
37	666	7770	66045	435897
38	703	8436	73815	501942
39	741	9139	82251	575757
40	780	9880	91390	658008
41	820	10660	101270	749398
42	861	11480	111930	850668
43	903	12341	123410	962598
44	946	13244	135751	1086008
45	990	14190	148995	1221759
46	1035	15180	163185	1370754
47	1081	16215	178365	1533939
48	1128	17296	194580	1712304
49	1176	18424	211876	1906884
50	1225	19600	230300	2118760
51	1275	20825	249900	2349060
52	1326	22100	270725	2598960
53	1378	23426	292825	2869685
54	1431	24804	316251	3162510

Unità.	Binarj.	Ternarj.	Quadernarj.	Quinarj.
55	1485	26235	341055	3478761
56	1540	27720	367290	3819816
57	1596	29260	395010	4187106
58	1653	30856	424270	4582116
59	1711	32509	455126	5006386
60	1770	34220	487635	5461512
61	1830	35990	521855	5949147
62	1891	37820	557845	6471002
63	1953	39711	595665	7028847
64	2016	41664	635376	7624512
65	2080	43680	677040	8259888
66	2145	45760	720720	8936928
67	2211	47905	766480	9657648
68	2278	50116	814385	10424128
69	2346	52394	864501	11238513
70	2415	54740	916895	12103014
71	2485	57155	971635	13019909
72	2556	59640	1028790	13991544

Unità.	Binarj.	Ternarj.	Quadernarj.	Quinarj.
73	2628	62196	1088430	15020334
74	2701	64824	1150626	16108764
75	2775	67525	1215450	17259290
76	2850	70300	1282975	18474840
77	2926	73150	1353275	19757815
78	3003	76076	1426425	21111090
79	3081	79079	1502501	22537515
80	3160	82160	1581580	24040016
81	3240	85320	1663740	25621596
82	3321	88560	1749060	27285336
83	3403	91881	1837620	29034396
84	3486	95284	1929501	30872016
85	3570	98770	2024785	32801517
86	3655	102340	2123555	34826302
87	3741	105995	2225895	36949857
88	3828	109736	2331890	39175752
89	3916	113564	2441626	41507642
90	4005	117480	2555190	43949268

Unità.	Binarj.	Ternarj.	Quadernarj.	Quinarj.
91	4095	121485	2672670	46504458
92	4186	125580	2794155	49177128
93	4278	129766	2919735	52971283
94	4371	134044	3049501	54891018
95	4465	138415	3183545	57940519
96	4560	142880	3321960	61124064
97	4656	147440	3464840	64446024
98	4753	152096	3612280	67910864
99	4851	156849	3764376	71523144
100	4950	161700	3921225	75287520

Non è ſola la maniera di ſopra eſpoſta per comporre queſta Tavola con queſti numeri determinati, che altresì può ſervire in altri numeri maggiori propoſti; ma ciò può ancora ottenerſi in altre maniere, eſſendo ogni determinazione de' numeri binarj, o ternarj, o quadernarj, o quinarj uguale ancora alla ſomma della ſua antecedente, e dell' antecedente pure dell' altro ſuo precedente. Per eſempio, nel binario dell' unità 94, che è 4371, la ſomma di queſti due fa il 4465, che ſarà il binario di 95; il ternario poi di 94 eſſendo 34044, ſommato col binario di eſſo 4371, che rieſce

138415, sarà pure il ternario di 95 e parimente sommato il ternario di 94, cioè 134044, col quadernario di esso 3049501, la somma di essi 3183545 è il quadernario di 95; e similmente con quel quadernario di 94, cioè 3049501, aggiuntovi il suo quinario 54891018, si averà 57940519, che è appunto il quinario di 95; e così accade in tutti.

Anzi dato un proposto numero di uomini, se si cerca quanti binarj possano indi cavarsi, basta moltiplicare esso numero nel precedente, e questo prodotto diviso pel mezzo sarà il quoziente de' binarj. Per esempio, se il numero degli uomini è 90 moltiplicato in 89 fa 8010, il che diviso pel mezzo, riesce 4005, e tale pure è il numero de' suoi binarj, come può vedersi nella tavola precedente. Similmente se gli uomini sono 100, moltiplicato ciò per 99, che fa 9900, e diviso pel mezzo ne dà 4950, il quale appunto è il numero de' suoi binarj; e se tali uomini fossero pure 145, moltiplicato ciò in 144, sarebbe 20880, la cui metà 10440 sarebbe il numero de' suoi binarj.

Similmente, cercandosi quanti ternarj possano provenire da un dato numero d' uomini, conviene moltiplicare tal numero nel precedente, e nel prossimo anteriore, il quale prodotto, diviso per 6 ci darà il quoziente de' suoi ternarj; così essendo 90 li dati numeri, ciò si moltiplichi in 89, che fa 8010, e questo pure in 88, che riuscirà 704880, e ciò diviso per 6 riesce 117480, che appunto è il numero de' suoi ternarj. Similmente, essendo 100 il numero, moltiplicasi

plicasi il 100 in 99 ed in 98, dal che ne proviene 970200, che diviso per 6 dà 161700, il che appunto è il numero de' suoi ternarj; e se gli uomini fossero solamente 23, moltiplicato ciò per 22, che fa 506, e poscia ancora per 21, che farà 10626, ciò diviso per 6 ne viene 1771, che per l'appunto è il numero de' suoi ternarj, come può vedersi in detta tavola.

Ma cercando il numero de' quadernarj, converrà moltiplicare il numero degli uomini ne' tre numeri ad esso precedenti, e dividerne il prodotto per 24. Così ne i 90 si moltiplichi ciò per 89, per 88, e per 87, dal che ne procede 61324560, il che diviso per 24, ci dà i quadernarj 2555190; e se gli uomini sono 100 moltiplicato ciò per 99, indi per 98, poscia per 97 diviene 94109400, e ciò diviso per 24, dà 3921225, che tali sono i suoi quadernarj; e se il numero degli uomini fosse solamente 18, moltiplicando ciò in 17 fa 306, e poscia in 16 diverrà 4896, indi in 15 riuscirà 73440, che diviso per 24 darà 3060, che appunto tanti sono li suoi quadernarj.

Volendo finalmente trovare il numero de' quinarj, bisognerà moltiplicare il numero degli uomini in ciascuno de' quattro precedenti, e il prodotto dividerlo per 120; così nel numero di 90 si moltiplichi ciò per 89, indi per 88, poscia per 87, e finalmente per 86, che diverrà 5273912160, e questo diviso per 120, ne apporta 43949268 quinarj; se poi il numero fosse 100, si moltiplichi in 99, indi in 98, poscia in 97, e finalmente in 96, ed avremo 9034502400, il

che diviso per 120 riesce 75287520, essendo appunto tanti i quinarj di 100; e parimente, se il numero degli uomini fosse solamente 43, moltiplicato ciò per 42 che fa 1806, poscia per 41 che riuscirà 74046, indi per 40 che darà 2961840, e finalmente per 39 il cui prodotto sarà 115511760, che diviso per 120, ne dà i quinarj 962598, come appunto si ha nella tavola sopra addotta.

Chi però nel giuoco del lotto proponesse dovere insieme uscire per sorte 5 particolari Senatori da quei 100, o da quei 90 dove si tira il quinario, non potrà avere ciò indovinato se non una volta, in cui potessero riuscirne quelli stessi da lui proposti, potendone risalire 75287520 quinarj; e viceversa potrebbe mancargli 75287519 volte, in cui si facessero altri quinarj, supposto che i detti Senatori fossero 100, che se fossero 90 essendo li suoi quinarj 43949268, gli mancherebbero almeno gli altri 43949267.

Chi ne avesse proposti solamente 4 particolari, essendo 100 i Senatori, si potrebbe aggiungere nel quinario uno degli altri 96, e però in 96 maniere potrebbe guadagnarci, e nelle rimanenti 75287414 non potrebbe vincere; ed essendo essi proposti solamente 90, similmente potrebbe guadagnare in 86 volte, ma non potrebbe vincere nelle rimanenti 43949182.

Essendone poscia proposti 3 soli, se 100 sono i Senatori, potrà essere, che ne' quinarj se ne aggiungano a quei 3., altri 2 negli altri 97, i quali sarebbero 4656; onde in queste volte potrebbe

be guadagnarci, ma non nelle seguenti 75282864; ed essendo quelli 90, si aggiungerebbero gli altri 2 alli 87, onde in 3741 volte potrebbe guadagnare, ma gliene mancherebbero 43945527.

E se ne proponesse 2 soli, da gli altri 98., se sono 100 li Senatori dovranno aggiungersene tre ne i quinarj, perciò 152096 volte potrebbe guadagnarci, ma ci perderebbe nelle rimanenti 75135424; ed essendo essi proposti solamente 90, se ne aggiungerebbero 3 dalli 88, onde guadagnar potrebbe in 109736, e gli mancherebbe il guadagno in 43839532 volte.

Se poi ne avesse nominato un solo de i 100, si aggiungerebbero 4 ne i quinarj dalli rimanenti 99, onde 3764376 volte potrebbe guadagnarci, e ne perderebbe nelle rimanenti volte 71523144, e se fussero i sottoposti solamente 90, degli altri 89 se ne aggiungerebbero i 4, che saranno 2441626 le volte, in cui potrebbe guadagnare, e solo gli mancherebbero 41507642.

Quindi è chiaro essere alquanto più facile il guadagnare proponendo uno, che due, ed ancora più facile con proporre due, che tre, e molto più facile il proporre tre soli, che quattro, ed alquanto meglio il proporre quattro, che cinque; essendo più difficile di tutti il proposto di cinque, ed ancora il proposto di quattro più difficile di ciascuno de' seguenti tre, due, ed uno; ed il proposto di tre più difficile, che quello di due, ed uno; siccome quello di due è più difficile del proposto di un solo; e ciascheduno nel numero maggiore de' Senatori ha più mancanza, che nel loro numero minore, come si è

 di-

dimostrato tra la moltitudine di 100, e tra quell' altra di 90.

Però se dovessero cavarsi cinque da sei uomini solamente, chi ne proponesse due soli, averebbe ugual numero di guadagno che di mancanza, essendo 3 il guadagno, e 6 manco 3, cioè pure 3 la mancanza; e proposto un solo, averebbe cinque volte il guadagno, ed una volta sola gli mancherebbe; se essi uomini fossero 7, propostone uno, si potrebbe 15 volte guadagnare, e solamente 6 volte perdere; e similmente più il guadagno, che la mancanza sarebbe nel numero 8, e nel 9, e finalmente nel 10 sarebbe uguale il guadagno con la mancanza, concorrendo l'uno, e l'altra nel 126, come si è dimostrato di sopra; ma poscia in maggior numero degli uomini da sottrarsi, sarà sempre maggiore la mancanza, che il guadagno in un solo, e molto più in un binario, e più nel ternario, più nel quadernario, ed assai più nel quinario; onde mi pare troppo rischio il concorrere a questa sorte di lotti, in cui nè meno può prendersi quei nomi che debbano per sorte essere estratti da quel fanciullo, da cui si fanno cavare.

CAPITOLO XVII.

De' Logaritmi Aritmetici.

SOgliono costituirsi i Logaritmi ad altri numeri geometricamente proporzionali, di cui il primo sia la radice, il secondo è il quadrato, il terzo è il cubo, il quarto dicesi biquadrato, il quin-

quinto è surdesolido, il sesto quadratocubo &c. essendo il primo moltiplicato in se stesso, fa il secondo, ed il secondo moltiplicato nel primo, fa il terzo, ed il terzo moltiplicato nel primo, fa il quarto, ed il quarto pure moltiplicato nel primo, fa il quinto, e così gli altri continuamente proporzionali; ma i Logaritmi, postone uno, di qualsivoglia numero, alla prima radice, il doppio di esso è Logaritmo al quadrato, ed il triplo del medesimo è Logaritmo al cubo, ed il quarto dello stesso è Logaritmo al biquadrato, ed il quinto di esso è Logaritmo al surdesolido &c.

Per esempio, essendo geometricamente Proporzionali questi numeri, che cominciano dal 2 sono pure Logaritmi questi sottoposti, che cominciano dal 3, o pure dal 7 &c.

Proporzionali -	2	4	8	16	32	64	128	&c.
Logaritmi ——	3	6	9	12	15	18	21	&c.
o pure ——	7	14	21	28	35	42	49	&c.
e così altri &c.								

E così ancora si osservi in essi Proporzionali, che uno essendo composto di due altri moltiplicati insieme, il Logaritmo di quello sarà composto dei Logaritmi degli altri due nella medesima serie. Per esempio, essendo il 128 composto da 32 moltiplicato in 4, il Logaritmo di 128, che è il 21, resta composto delli due 15 e 6 (attenenti al 32, ed al 4) che restano insieme 21; o pure, se il Logaritmo di 128 fosse il 49, sarà pure composto con 35, e 14 Logaritmi di 32, e di 4, e così gli altri; così il 4 moltipli-

cato in 16 facendo 64, i Logaritmi di que' due, che sono 6, e 12, composti insieme, fanno il 18 Logaritmo di 64; o pure di 16 è 4, essendo Logaritmi 28, e 14 la somma pure di questi fa 42, che pure è Logaritmo di 64.

Volendo però mettere i Logaritmi alla serie di tutti i numeri, bisognerà prenderli nella seguente maniera, composti di più numeri, avendo posti solamente li zeri all' unità, che in se moltiplicandosi rimane la stessa. Io quì porterò solamente i Logaritmi dall' 1 alli 200, benchè altri li apportano fino a 1000, altri a 10000, e Giovanni Prestet alli 20000; ed indi poscia si mostrerà, perchè in alcuni miei Logaritmi siasi variato l' ultimo numero.

LOGARITMI DE' NUMERI.

Numeri.	*Logaritmi.*		*Numeri.*	*Logaritmi.*	
1	0	0000000	15	1	1760913
2	0	3010300	16	1	2041200
3	0	4771213	17	1	2304480
4	0	6020600	18	1	2552726
5	0	6989700	19	1	2787536
6	0	7781513	20	1	3010300
7	0	8450980	21	1	3222193
8	0	9030900	22	1	3424227
9	0	9542426	23	1	3617278
10	1	0000000	24	1	3802113
11	1	0413927	25	1	3979400
12	1	0791813	26	1	4149734
13	1	1139434	27	1	4313639
14	1	1461280	28	1	4471580

Numeri.		Logaritmi.	Numeri.		Logaritmi.
29	1	4623980	61	1	7853298
30	1	4771213	62	1	7923917
31	1	4913617	63	1	7993406
32	1	5051500	64	1	8061800
33	1	5185140	65	1	8129134
34	1	5314789	66	1	8195440
35	1	5440680	67	1	8260748
36	1	5563026	68	1	8325089
37	1	5682017	69	1	8388491
38	1	5797836	70	1	8450980
39	1	5910647	71	1	8512583
40	1	6020600	72	1	8573326
41	1	6127839	73	1	8633229
42	1	6232493	74	1	8692317
43	1	6334685	75	1	8750613
44	1	6434527	76	1	8808136
45	1	6532126	77	1	8864907
46	1	6627578	78	1	8920947
47	1	6720979	79	1	8976271
48	1	6812413	80	1	9030900
49	1	6901960	81	1	9084852
50	1	6989700	82	1	9138139
51	1	7075702	83	1	9190781
52	1	7160034	84	1	9242793
53	1	7242759	85	1	9294189
54	1	7323939	86	1	9344985
55	1	7403627	87	1	9395193
56	1	7481880	88	1	9444827
57	1	7558749	89	1	9493900
58	1	7634280	90	1	9542426
59	1	7708520	91	1	9590414
60	1	7781513	92	1	9637878

Numeri.		*Logaritmi.*	*Numeri.*		*Logaritmi.*
93	1	9684830	125	2	0969100
94	1	9731279	126	2	1003706
95	1	9777236	127	2	1038037
96	1	9822713	128	2	1072100
97	1	9867717	129	2	1105898
98	1	9912260	130	2	1139434
99	1	9956353	131	2	1172913
100	2	0000000	132	2	1205740
101	2	0043214	133	2	1238516
102	2	0086002	134	2	1271048
103	2	0128372	135	2	1303339
104	2	0170334	136	2	1335389
105	2	0211893	137	2	1367206
106	2	0253059	138	2	1398791
107	2	0293838	139	2	1430148
108	2	0334239	140	2	1461280
109	2	0374265	141	2	1492192
110	2	0413927	142	2	1522883
111	2	0453230	143	2	1553360
112	2	0492180	144	2	1583626
113	2	0530784	145	2	1613680
114	2	0569049	146	2	1643529
115	2	0606978	147	2	1673173
116	2	0644580	148	2	1702617
117	2	0681860	149	2	1731863
118	2	0718820	150	2	1760913
119	2	0755469	151	2	1789769
120	2	0791813	152	2	1818436
121	2	0827854	153	2	1846915
122	2	0863598	154	2	1375207
123	2	0899052	155	2	1903317
124	2	0934217	156	2	1931347

Numeri.	*Logaritmi.*		*Numeri.*	*Logaritmi.*	
157	2	1958997	179	2	2528530
158	2	1986371	180	2	2552726
159	2	2013972	181	2	2576786
160	2	2041200	182	2	2600714
161	2	2068258	183	2	2624511
162	2	2095152	184	2	2648178
163	2	2121876	185	2	2671717
164	2	2148439	186	2	2695130
165	2	2174840	187	2	2718416
166	2	2201081	188	2	2741579
167	2	2227165	189	2	2764619
168	2	2253093	190	2	2787536
169	2	2278868	191	2	2810334
170	2	2304489	192	2	2833013
171	2	2329962	193	2	2855573
172	2	2355285	194	2	2878017
173	2	2380461	195	2	2900347
174	2	2405493	196	2	2922560
175	2	2430380	197	2	2944662
176	2	2455127	198	2	2966653
177	2	2479733	199	2	2988531
178	2	2504200	200	2	3010300
					&c.

Che questi Logaritmi siano bene proposti, può dimostrarsi, avvertendo come qualunque numero paragonandosi al suo quadrato, il Logaritmo di questo ne riesca il doppio di quello; e paragonandosi esso numero al suo cubo, il Logaritmo di questo sia il triplo di quello, e così negli altri suoi proporzionali riesca il Logaritmo tante volte moltiplice di quello della radice quanto in esso cre-

sca

ſca la proporzione. Per eſempio poſto il Logaritmo di 3, rieſce il doppio del medeſimo, per Logaritmo del di lui quadrato 9, e ne rieſce triplo il Logaritmo del ſuo cubo 27, e quadruplo il Logaritmo del biquadrato 81; e quintuplo il Logaritmo del ſurdeſolido 243 &c. Sicchè eſſendo Logaritmo di 3 il 0 4771213, ne rieſce del quadrato 9 queſt' altro Logaritmo 0 9542426, duplo di eſſo (benchè altri Matematici levano l' ultima unità dal Logaritmo di 9, ponendovi 0 9542425) e del quadrato di 2, che è 4, il Logaritmo è 0 6020600, duplo ſimilmente del Logaritmo di 2, che era 0 3010300; e del quadrato di 7, che è 49, il Logaritmo sarà 1 6901960, che è il doppio di 0 8450980, Logaritmo di 7 (però altri Matematici aggiungono una unità di ſopra al Logaritmo di 49, mettendolo 1 6901961) Parimente del quadrato di 6, che è 36, il Logaritmo è 1 5563026, duplo appunto di 0 7781513, Logaritmo di 6 (benchè altri Matematici pongono a 36 il Logaritmo minore di una unità, cioè 1 5563025). Così pure il quadrato di 14 eſſendo 196, il ſuo Logaritmo è 2 2922560, che parimente è duplo di 1 1461280 Logaritmo di 14. E così in tutti gli altri.

Circa il cubo di 2 è 8, ed è il Logaritmo di 8 triplo di quello di 2, eſſendo quello 0 9030900; e queſto 0 3010300, la terza parte di eſſo; ſimilmente 1 4313639, Logaritmo di 27 cubo di 3, è quello pure triplo di 0 4771213, Logaritmo di 3 (al medeſimo però Logaritmo di 27, levano l' ultima unità alcuni Matema-

tici

tici, mettendogli 1 4313638). Il cubo di 5 è pure 125, il cui Logaritmo 2 0969100, è parimente triplo del Logaritmo di 5, che era 0 6989700; e così ſono tutti gli altri.

Oltre di ciò, qualunque numero compongaſi con un altro moltiplicato in eſſo, il Logaritmo di tale numero prodortto da due altri, è compoſto da ambidue i Logaritmi di que' numeri due. Per eſempio il numero 84, eſſendo compoſto da 2 moltiplicati in 42, ed ancora da 3 moltiplicato in 28, e da 4 moltiplicato in 21, e da 6 moltiplicato in 14, e da 7 moltiplicato in 12, ſarà il Logaritmo di 84 compoſto sì da quelli di 2, e di 42, sì dagli altri di 3, e 28, e da 4, e da 21, e da 6, e da 14, e da 7, e da 12, come vedremo in queſta maniera.

2	0 3010300
42	1 6232493
84	1 9242793

3	0 4771213
28	1 4471580
84	1 9242793

4	0 6020600
21	1 3222193
84	1 9242793

6	0 7781513
14	1 1461280
84	1 9242793

7	0 8450980
12	1 0791813
84	1 9242793

Parimente il 36 (oltre l' eſſere compoſto da 6 in 6 quadrato di eſſo) è pure moltiplicato da 2 in 18, da 3 in 12, e da 4 in 9, onde ne ſeguono li compoſti de' loro Logaritmi, che fanno uguale il Logaritmo di 36 in queſta maniera.

2	0 3020300
18	1 2552726
36	1 5563026

3	0 4771213
12	1 0791813
36	1 5563026

4	0 6020600
9	0 9542425
36	1 5563026

E così potrà ritrovarsi negli altri numeri; onde ancora moltiplicando il 93 in 95, donde ne proverrà il numero assai maggiore 8835, si troverà il Logaritmo di questo composto dalli due Logaritmi di quelli altri, cioè da 1 9684830, che è di 93, ed 1 9777236, che è di 95, ne segue 3 9462066, per Logaritmo di 8835; e similmente si potranno ritrovare i Logaritmi di qualunque numero, proponendoli secondo i modi già dimostrati.

Ne' libri di Gasparo Scotto, e di Francesco Saverio Brunetti al Logaritmo di 80 pongono 1 9030899, ma da Claudio Francesco de Sciales, e da Giovanni Prestet ci si mette, come ancora io ci ho posto 1 9030900, essendo 80 moltiplicato da 8 in 10, e però i loro Logaritmi 0 9030900 dell' 8, ed 1 0000000 del 10 appunto fanno composti il nostro Logaritmo di 80. Tutti però levano similmente una unità dalli Logaritmi di 9, di 12 di 18 di 24 di 26, di 27, di 33 di 36, di 39, di 45, di 48, di 52, di 54, di 63, di 66, di 72, di 78, di 81, di 90, di 93, di 96, di 104, di 108, di 117, di 120, di 123, di 126, di 129, di 132, di 135, di 141, di 143, di 144, di 153 di 156, di 159, di 162, di 164, di 165, di 171, di 172, di 174, di 180, di 186 di 188, di 189, di 192, di 195, di 198 (anzi in quello di 81, ed in quello di 162 levano le due ultime unità, per esserne levato uno al 9, di cui l' 81 è quadrato, ed il 162 è duplo di esso) però ne pongono una sola unità di più ne' Logaritmi di 49, di 98, di 119, di 161, di 186; ma siccome si è mostrato,

essere

essere essi Logaritmi da me posti, ottimamente corrispondenti a i Logaritmi degli altri numeri, che moltiplicandosi insieme fanno quel maggior numero, che ha quel Logaritmo, di cui si cerca; può altresì in altri numeri cercarne i loro Logaritmi, riguardando da quali altri Logaritmi de' numeri componenti esso numero, possa il Logaritmo determinarsi al medesimo numero.

APPENDICE.

Molte altre aritmetiche osservazioni si potrebbero quì aggiungere, ma dipendendo dalle dimostrazioni geometriche, ed algebratiche da esporsi in altri luoghi, non occorre in questo luogo parlarne. Solamente aggiungerò quì altre proprietà appartenenti a' cubi, a' quadrati, ed alle loro radici.

A		*B*		*C*
1	——	1	——	1
2	——	3	——	4
3	——	6	——	9
4	——	10	——	16
5	——	15	——	25
6	——	21	——	36
7	——	28	——	49
8	——	36	——	64
9	——	45	——	81
10	——	55	——	100
11	——	66	——	121
12	——	78	——	144
&c.		&c.		&c.

Primieramente si osservi, che posta la serie *A* de' numeri dall' unità crescenti, cioè 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.; e posta l' altra serie *B*, che è la somma di tutti gli antecedenti, cioè 1 uguale ad 1, poscia 1, e 2 uguale a 3, indi 1, 2, e 3 uguale a 6, ed aggiunto a questo il 4 fa il 10, al quale unito il 5 fa il 15, e messovi il 6 fa 21, &c. Poscia nell' altra serie *C*, si fa la somma di due numeri dell' antecedente serie *B*, e ne riescono i quadrati de' numeri della serie *A*, rimanendo primieramente 1, indi 1 e 3 uguale a 4 quadrato di 2, poscia 3 e 6 uguale a 9 quadrato di 3, di poi 6 e 10 uguale a 16 quadrato di 4, ne segue 10, e 15 uguale a 25 quadrato di 5, e finalmente 15 e 21 uguale a 36 quadrato di 6, e così tutti gli altri quadrati 49, 64, 81, &c. composti della sua radice, e di tutti gli altri numeri precedenti.

Se-

A	B	D	E
1	1	1	1
2	3	9	8
3	6	36	27
4	10	100	64
5	15	225	125
6	21	441	216
7	28	784	343
8	36	1296	512
9	45	2025	729
10	55	3025	1000
11	66	4356	1331
12	78	6084	1728
&c.	&c.	&c.	&c.

Secondariamente alle due ſerie *A*, e *B*, aggiunta una ſerie *D*, in cui ſono i quadrati di quelle ſomme *B* delle radici, cioè l' 1 di 1 il 9 di 3, il 36 di 6, il 100 di 10, il 225 di 15 &c. Ma nell' altra ſerie *E*, ſono i cubi 1, 8, 27, 64 &c. corriſpondenti alle radici 1, 2, 3, 4 &c. della ſerie *A*, i quali cubi ſono cavati dalla ſerie *D*, levando ogni quadrato dal ſuo precedente, eſſendo 9 manco 1 uguale ad 8, e il 36 manco 9 uguale al 27, ed il 100 manco 36 uguale al 64, ed il 225 manco il 100 uguale a 125 &c.

Anzi può in terzo luogo oſſervarſi, che i medeſimi quadrati delle ſomme delle radici, quali ſono nella ſerie *D*, ſono eſſi pure la ſomma de' cubi di quelle radici, che compongono la loro radice quadra; cioè il 9 quadrato di 3, è uguale ad 1 ed 8, che ſono i cubi di 1 e di 2; ed il

quadrato 36 la cui radice e 6, è uguale ad 1, 8, e 27, che sono i cubi di 1, di 2, e di 3; similmente il quadrato 100 la cui radice è 10, è uguale ad 1, 8, 27, è 64 che sono i cubi di 1, 2, 3, e 4; ed ancora il seguente quadrato 225 la cui radice 15, rimane composto de' cubi 1, 8, 27, 64, e 125, le cui radici sono 1, 2, 3, 4, e 5, che fanno la somma di 15; e così ancora riesce in ciascun altro.

F.	*G.*	*H.*	*I.*
2	2	4	8
4	6	36	72
6	12	144	288
8	20	400	800
10	30	900	1800
12	42	1764	3528
&c.	&c.	&c.	&c.

La quarta osservazione può essere nelle serie *F*, *G*, *H*, *I*. Nella prima sono i numeri crescenti di 2, cioè 2, 4, 6, 8 &c; nella seconda *G*. vi è la somma di essi 2, 6, 12, 20 &c; e nella terza *H*. vi sono i quadrati di tali somme 4, 36, 144, 400 &c; e nell' ultima serie *I*. vi è il doppio di ciascuno di quei precedenti quadrati, cioè 8, 72, 288, 800 &c. quali bisogna osservare, che ciascheduno è la somma de' cubi di quei numeri della serie *F*, cioè 8 è il cubo di 2, ed il 72 è uguale ad 8 e 64, che sono i cubi di 2 e di 4; similmente il 288 è uguale a numeri 8, 64, e 216, che sono i cubi di 2, di 4, e di 6; parimente l' 800 uguaglia 8, 64, 216, 512, che sono i cubi di 2, di 4, e di 6, e di 8, e così gli altri.

K	*L*	*M*	*N*
3	3	9	27
6	9	81	243
9	18	324	972
12	30	900	2700
15	45	2025	6075
18	63	3969	11907
&c.	&c.	&c.	&c.

La quinta osservazione sia nell' altre serie *K*, *L*, *M*, *N*, la prima delle quali ha i numeri di ternario crescenti 3, 6, 9, 12 &c; la seconda *L* ha la somma di essi 3, 9, 18, 30, &c; la terza *M* contiene i quadrati di esse somme 9, 81, 324, 900 &c; l' ultima *N* triplica gli antecedenti quadrati, che riescono 27, 243, 972 &c; e sono questi parimente la somma de' cubi de' numeri della serie *K*, essendo 27 il cubo di 3, ed il 243 uguale a 27 e 216, che sono i cubi di 3 e di 6; ed ancora il 972 uguale a 27, 216, e 729 che sono i cubi di 3, di 6, e di 9, e così gli altri.

Similmente se si prendessero i numeri crescenti di 4, e poi le somme di essi, indi i quadrati di queste, poscia il quadruplo di ciascuno di essi quadrati, saranno pur questi la somma de' cubi di quei numeri primieramente descritti; e parimente in altre serie di numeri di qualunque distanza aritmeticamente disposti, ne seguirà similissima serie de' numeri composti de' cubi di quelle proposte radici.

Alla fine può avvertirsi, che i numeri se finissero in 2, in 3, in 7, e in 8, non potranno mai

essere